MPSI 14-15 Feuille n°1 : Nombres complexes Du 03/09/14 au 13/09/14

1	Mettre sous forme trigonométrique : **a)** $(1 + \cos\alpha + i \sin\alpha)^n$ **b)** $\dfrac{1 + \cos\alpha + i \sin\alpha}{1 + \cos\beta + i \sin\beta}$.
2	Résoudre **a)** $(1 + i) z^2 - (5 + 11 i) z + 26 i = 0$ **b)** $z^6 = (z - 1)^6$ **c)** $z^4 - 30 z^2 + 289 = 0$ **d)** $\left(\dfrac{z + i}{z - i}\right)^3 + \left(\dfrac{z + i}{z - i}\right)^2 + \left(\dfrac{z + i}{z - i}\right) + 1 = 0$ **e)** $z^2 + (1 - 2 i) z - 2 i = 0$
3	Comment choisir u et v pour que $\dfrac{u+v}{1+uv}$, $i\dfrac{u-v}{1+uv}$ et $\dfrac{1-uv}{1+uv}$ soient simultanément réels?
4	Module et argument de : $(1-i)^{11}$, $\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{17}$, $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$, $\dfrac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}}$ et $\dfrac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$
5	Montrer $1+\dfrac{1}{\cos 2x}=\dfrac{\tan 2x}{\tan x}$. En déduire une expression de $P_n=\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+\dfrac{1}{\cos 2^k x}\right)$.
6	Rechercher les couples de complexes (z_1,z_2) vérifiant $\begin{cases} z_1 z_2 = \frac{1}{2} \\ z_1 + 2z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$
7	Trouver l'ensemble des points d'affixe z telle que i, z et $i z$ soient les affixes de points alignés
8	Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(z + 2 i)^n + (z - 2 i)^n = 0$
9	Développer $(1 + \sqrt{3}\, i)(1 + i)$ et en déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
10	Résoudre : $z^7 + C_7^2 z^5 + C_7^4 z^3 + C_7^6 z = 0$
11	Montrer que si $\lvert z\rvert = 1$ et $\lvert t\rvert = 1$ alors $\dfrac{z+t}{1+zt} \in \mathbb{R}$
12	Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que l'on a : $\lvert z+z'\rvert^2 + \lvert z-z'\rvert^2 = 2\lvert z\rvert^2 + 2\lvert z'\rvert^2$. Interpréter géométriquement cette relation.
13	Résoudre les équations: **a)** $z^2 - (1-2i) z + 1 - 7i = 0$ **b)** $(4+2i) z^2 - (7-i) z = 1 + 3i$ **c)** $z^4 + (3-6i) z^2 + 2(16-63i) = 0$ **d)** $z^6 + (2i-1) z^3 - 1 - i = 0$ **e)** $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(12+5i) = 0$ **f)** $(i-1)z^3 - (5i-11) z^2 - (43 + i)z + 9 + 37i = 0$ sachant qu'il y a une solution imaginaire pure **g)** $z^4 - 4(1+i) z^3 + 12i z^2 - 8i(1+i)z - 5 = 0$ sachant qu'il y a une solution dans $\mathbb{R}$ et une dans $i\mathbb{R}$
14	**a)** Résoudre : $(1 + i z)^5 = (1 - i z)^5$ **b)** En déduire les tangentes des nombres $\pi/5$ et $2\pi/5$ puis celle de $\pi/10$
15	Linéariser: $\cos^6 x$, $\sin^5 x$, $\sin^7 x$, $\cos^3 x \sin^3 x$, $\cos^3 x \sin^4 x$
16	Exprimer cos(5x) en fonction de cos(x). Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ (résoudre cos(5x) = 0)
17	Soient $(u,v,z)\in\mathbb{C}^3$ tel que : $z = u + i v$. Montrer que : $\lvert z\rvert^2 = u^2 + v^2 \Leftrightarrow ((u,v)\in\mathbb{R}^2$ ou $z = 0)$
18	Rechercher les couples de complexes (z_1,z_2) vérifiant : **a)** $\begin{cases} z_1 z_2 = 7 \\ z_1 + z_2 = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} z_1 z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$
19	Résoudre : $\left(\dfrac{z-2}{z-4i}\right)^2 - 6\left(\dfrac{z-2}{z-4i}\right) + 13 = 0$
20	Résoudre les équations : **a)** $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = 2\cos(2x)$ **b)** $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) = 1$
21	Discuter selon les valeurs de a l'existence de solutions de l'équation : $a \cos(x) - 2 \sin(x) = a + 1$
22	On échange les 2 aiguilles d'une horloge. La position de ces aiguilles ne correspondent pas toujours à une véritable heure. Par exemple il n'est pas possible d'avoir la grande aiguille sur le 4 et la petite sur le 12. Déterminer le nombre de positions des aiguilles de cette horloge trafiquée qui correspondent à une position correcte pour une horloge usuelle