Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 1

Problème I : Simplification d'une somme de cosinus liés à $\frac{\pi}{17}$

1. On désigne dans cette question par a et h deux réels, et par n un élément de $\mathbb{N}^*$ On pose : $C(a,h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (cos\,(a+kh))$ et $S(a,h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (sin\,(a+kh))$
   (a) En formant $T(a,h) = C(a,h) + iS(a,h)$, écrire $T(a,h)$ comme somme des premiers termes d'une certaine suite géométrique.
   (b) On suppose que $\sin\frac{h}{2} = 0$. Calculer $T(a,h)$, puis $C(a,h)$ et $S(a,h)$, en fonction de a et de n.
   (c) On suppose que $\sin\frac{h}{2} \neq 0$. Donner une expression simplifiée de $T(a,h)$ puis démontrer que :
   $$C(a,h) = \frac{\sin\frac{nh}{2} \times \cos\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}} \text{ et } S(a,h) = \frac{\sin\frac{nh}{2} \times \sin\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin\frac{h}{2}}$$
2. Dans cette question, et jusqu'à la fin du problème, θ désigne, pour alléger les notations, le réel $\frac{\pi}{17}$ et on ne demande pas le calcul des valeurs approchées des radicaux. On pose :
   $$x_1 = \cos(3\theta)+\cos(5\theta)+\cos(7\theta)+\cos(11\theta) \text{ et } x_2 = \cos(\theta)+\cos(9\theta)+\cos(13\theta)+\cos(15\theta)$$
   (a) Montrer que $x_1 > 0$
   (b) Calculer $x_1 + x_2$ à l'aide de la question 1) (on trouvera un rationnel très simple).
   (c) Calculer $x_1 \times x_2$ (on pourra développer ce produit et utiliser les méthodes de linéarisation pour montrer que $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2)$) .
   (d) Déduire de ce qui précède, des expressions de x_1 et x_2 par radicaux carrés (i.e. avec le symbole $\sqrt{\ }$) .

Problème II : Racines 11^{e} de l'unité

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $U_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z^n = 1 \right\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
   (a) Déterminer les éléments de U_n. Montrer que leur somme est nulle.
   (b) Montrer que $(U_n, \times)$ est un groupe commutatif (les propriétés de la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont supposées connues) .
2. Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{11}}$. On pose $S = u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9$ et $T = u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10}$
   (a) Montrer, sans calculs, que S et T sont conjugués $\left(\text{utiliser } u^{11} = 1 \text{ et que } \overline{u} = \dfrac{1}{u}\right)$.
   (b) Montrer que la partie imaginaire de S est positive (sans calcul numérique) .
   (c) Démontrer que $S + T = -1$ et $S \times T = 3$. En déduire les valeurs de S et T.
   (d) A l'aide des formules d'Euler, montrer que : $i\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) = \dfrac{u^3 - 1}{u^3 + 1} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \left(-u^3\right)^k$ puis que : $4i\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = 3\left(u - u^{10}\right)$
   (e) En déduire que : $\tan\left(\dfrac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\dfrac{2\pi}{11}\right) = i\,(T - S) = \sqrt{11}$