DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 1

PROBLEME I : Somme de cosinus liés à $\frac{\pi}{17}$

1) On désigne dans cette question par a et h deux réels, et par n un élément de $\mathbb{N}^*$. **On** pose : $C(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + k h)$ et $S(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + k h)$

a) En formant T(a,h) = C(a,h) + i S(a,h), écrire T(a,h) comme somme des premiers termes d'une certaine suite géométrique.

$$T(a,h) = C(a,h) + i\,S(a,h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + k h) + i \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + k h) = \sum_{k=0}^{n-1} (\cos(a + k h) + i \sin(a + k h)) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a + k h)}$$

D'où, $\mathbf{T(a,h) = e^{ia} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{ih}\right)^k}$

b) On suppose que $\sin \frac{h}{2} = 0$. **C**alculer T(a,h) puis C(a,h) et S(a,h) en fonction de a et de n.

Si $\sin \frac{h}{2} = 0$, alors $h \equiv 0\ [2\pi]$ et donc $e^{ih} = 1$. Ainsi, $\mathbf{T(a,h) = n\, e^{ia}}$ **et donc C(a,h) = n cos(a) et S(a,h) = n sin(a)**

c) On suppose que $\sin \frac{h}{2} \neq 0$. Simplifier T(a,h) puis démontrer que $C(a,h) = \dfrac{\sin\frac{nh}{2} \cos\left[a + (n-1)\frac{h}{2}\right]}{\sin\frac{h}{2}}$ et $S(a,h) = \dfrac{\sin\frac{nh}{2} \sin\left[a + (n-1)\frac{h}{2}\right]}{\sin\frac{h}{2}}$

Si $\sin \frac{h}{2} \neq 0$, alors h n'est pas un multiple de 2π et donc $e^{ih} \neq 1$. Ainsi, $\mathbf{T(a,h) = e^{ia} \dfrac{1 - e^{inh}}{1 - e^{ih}}}$

Or $1 - e^{inh} = -2i \sin\frac{nh}{2}\, e^{i\frac{nh}{2}}$ et $1 - e^{ih} = -2i \sin\frac{h}{2}\, e^{i\frac{h}{2}}$. Aussi, $\mathbf{T(a,h) = \dfrac{\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\, e^{i\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}}$.

Ainsi, on a : $\mathbf{C(a,h) = \dfrac{\sin\frac{nh}{2} \cos\left[a + (n-1)\frac{h}{2}\right]}{\sin\frac{h}{2}}}$ **et** $\mathbf{S(a,h) = \dfrac{\sin\frac{nh}{2} \sin\left[a + (n-1)\frac{h}{2}\right]}{\sin\frac{h}{2}}}$

2) Dans cette question, et jusqu'à la fin du problème, θ désigne, pour alléger les notations, le réel $\frac{\pi}{17}$ et on ne demande pas le calcul des valeurs approchées des radicaux. **On** pose: $x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$ et $x_2 = \cos(\theta) + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$

a) Montrer que $x_1 > 0$.

On a : $\cos(3\theta) + \cos(11\theta) = 2\cos(7\theta)\cos(4\theta)$ donc $x_1 = 2\cos(7\theta)\cos(4\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta)$

Or, 4θ, 5θ et 7θ sont tous trois dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc leurs cosinus sont strictement positifs. **Ainsi,** $\mathbf{x_1 > 0}$

b) Calculer $x_1 + x_2$ à l'aide de la question B) 1) (on trouvera un rationnel très simple)

$x_1 + x_2 = \cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(9\theta) + \cos(11\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta) = \sum_{k=0}^{7} \cos(\theta + 2k\theta)$. Ainsi d'après la question 1),

$x_1 + x_2 = \dfrac{\sin(8\theta)\cos(8\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(16\theta)}{\sin(\theta)} = \dfrac{1}{2}$ car $\sin(16\theta) = \sin(17\theta - \theta) = \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$ D'où $\mathbf{x_1 + x_2 = \frac{1}{2}}$

c) Calculer $x_1 x_2$ (on pourra développer ce produit et utiliser les méthodes de linéarisation pour montrer que $x_1 x_2 = -2(x_1 + x_2)$)

$x_1 x_2 = \cos3\theta\cos\theta + \cos3\theta\cos9\theta + \cos3\theta\cos13\theta + \cos3\theta\cos15\theta + \cos5\theta\cos\theta + \cos5\theta\cos9\theta + \cos5\theta\cos13\theta + \cos5\theta\cos15\theta$
$+ \cos7\theta\cos\theta + \cos7\theta\cos9\theta + \cos7\theta\cos13\theta + \cos7\theta\cos15\theta + \cos11\theta\cos\theta + \cos11\theta\cos9\theta + \cos11\theta\cos13\theta + \cos11\theta\cos15\theta$

Or : $\cos3\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\cos4\theta + \frac{1}{2}\cos2\theta = -\frac{1}{2}\cos13\theta - \frac{1}{2}\cos15\theta$ car $4\theta = \pi - 13\theta$ et $2\theta = \pi - 15\theta$ De même :

$\cos3\theta\cos9\theta = \frac{1}{2}\cos12\theta + \frac{1}{2}\cos6\theta = -\frac{1}{2}\cos5\theta - \frac{1}{2}\cos11\theta$, $\cos3\theta\cos13\theta = \frac{1}{2}\cos16\theta + \frac{1}{2}\cos10\theta = -\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\cos7\theta$,

$\cos3\theta\cos15\theta = \frac{1}{2}\cos12\theta + \frac{1}{2}\cos18\theta = -\frac{1}{2}\cos5\theta - \frac{1}{2}\cos\theta$, $\cos5\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\cos6\theta + \frac{1}{2}\cos4\theta = -\frac{1}{2}\cos11\theta - \frac{1}{2}\cos13\theta$,

$\cos5\theta\cos9\theta = \frac{1}{2}\cos14\theta + \frac{1}{2}\cos4\theta = -\frac{1}{2}\cos3\theta - \frac{1}{2}\cos13\theta$, $\cos5\theta\cos13\theta = \frac{1}{2}\cos18\theta + \frac{1}{2}\cos8\theta = -\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\cos9\theta$,

$\cos5\theta\cos15\theta = \frac{1}{2}\cos20\theta + \frac{1}{2}\cos10\theta = -\frac{1}{2}\cos3\theta - \frac{1}{2}\cos7\theta$, $\cos7\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\cos6\theta + \frac{1}{2}\cos8\theta = -\frac{1}{2}\cos11\theta - \frac{1}{2}\cos9\theta$,

$\cos7\theta\cos9\theta = \frac{1}{2}\cos16\theta + \frac{1}{2}\cos2\theta = -\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\cos15\theta$, $\cos7\theta\cos13\theta = \frac{1}{2}\cos20\theta + \frac{1}{2}\cos6\theta = -\frac{1}{2}\cos3\theta - \frac{1}{2}\cos11\theta$,

$\cos7\theta\cos15\theta = \frac{1}{2}\cos22\theta + \frac{1}{2}\cos8\theta = -\frac{1}{2}\cos5\theta - \frac{1}{2}\cos9\theta$, $\cos11\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\cos12\theta + \frac{1}{2}\cos10\theta = -\frac{1}{2}\cos5\theta - \frac{1}{2}\cos7\theta$,

$\cos 11\theta \cos 9\theta = \frac{1}{2}\cos 20\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta = -\frac{1}{2}\cos 3\theta - \frac{1}{2}\cos 15\theta$, $\cos 11\theta \cos 13\theta = \frac{1}{2}\cos 24\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta = -\frac{1}{2}\cos 7\theta - \frac{1}{2}\cos 15\theta$, $\cos 11\theta \cos 15\theta = \frac{1}{2}\cos 26\theta + \frac{1}{2}\cos 4\theta = -\frac{1}{2}\cos 9\theta - \frac{1}{2}\cos 13\theta$

D'où, en remarquant que chaque terme (parmi les $\cos k\theta$ avec k impair dans [1, 15]) apprait 4 fois avec le coefficient $-\frac{1}{2}$, on trouve : $\mathbf{x_1 x_2 = -2\left(\cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(9\theta) + \cos(11\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)\right) = -2(x_1 + x_2) = -1}$

d) Déduire de ce qui précède des expressions de x_1 et x_2 par radicaux carrés ("avec le symbole $\sqrt{\ }$").

Puisque $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}$ et $x_1 x_2 = -1$, on sait que x_1 et x_2 sont les racines de l'équation : $z^2 - \frac{1}{2}z - 1 = 0$. Cette équation possède pour solution $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{17}}{4}$. D'autre part on sait que x_1 est positif, donc $\mathbf{x_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}}$ **et** $\mathbf{x_2 = \frac{1-\sqrt{17}}{4}}$

PROBLEME : Racines 11ièmes de 1

I) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $U_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

a) Déterminer les éléments de U_n . Montrer que leur somme est nulle

b) Montrer que $(U_n, \times)$ est un groupe commutatif (les propriétés de la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont supposées connues)

Ce sont deux questions de cours…

II) Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{11}}$. On pose $S = u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9$ et $T = u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10}$.

a) Montrer sans calculs que S et T sont conjugués (utiliser $u^{11} = 1$ et que $\overline{u} = \frac{1}{u}$)

Les conjugués de u, u^3, u^4, u^5 et u^9 sont respectivement $u^{10}, u^8, u^7, u^6, u^2$ **donc S et T sont conjugués**

b) Montrer que la partie imaginaire de S est positive (sans calcul numérique)

La partie imaginaire de S est : $\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{18\pi}{11}\right)$

Dans cette somme, $\sin\left(\frac{6\pi}{11}\right)$ et et $\sin\left(\frac{8\pi}{11}\right)$ sont positifs car les angles correspondant sont dans $[0,\pi]$ alors que $\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{18\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{11}\right) = 2\cos\left(\frac{6\pi}{11}\right)\sin\left(\frac{10\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{10\pi}{11}\right) = \left(1 + 2\cos\left(\frac{6\pi}{11}\right)\right)\sin\left(\frac{10\pi}{11}\right)$ qui est positif car $2\cos\left(\frac{6\pi}{11}\right) > -1$. **Ainsi la partie imaginaire de S est positive.**

c) Démontrer que $S + T = -1$ et $S \times T = 3$. En déduire les valeurs de S et T

$S + T = \sum_{k=1}^{10} (u)^k = \sum_{k=0}^{10} (u)^k - 1$ **Donc $S + T = -1$**

En développant $S \times T$, on obtient :

$S \times T = u^3 + u^7 + u^8 + u^9 + u^{11} + u^5 + u^9 + u^{10} + u^{11} + u^{13} + u^6 + u^{10} + u^{11} + u^{12} + u^{14} + u^7 + u^{11} + u^{12} + u^{13} + u^{15} + u^{11} + u^{15} + u^{16} + u^{17} + u^{19}$

Donc, compte tenu que $u^{11} = 1$,

$S \times T = u^3 + u^7 + u^8 + u^9 + 1 + u^5 + u^9 + u^{10} + 1 + u^2 + u^6 + u^{10} + 1 + u + u^3 + u^7 + 1 + u + u^2 + u^4 + 1 + u^4 + u^5 + u^6 + u^8 = 5 + 2(S + T)$

Donc $S \times T = 3$

Ainsi S et T sont les solutions de l'équation : $z^2 + z + 3 = 0$. Cette dernière a pour solution $\frac{-1 + i\sqrt{11}}{2}$ et $\frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}$

Donc compte tenu de la question b), on a : $\mathbf{S = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2}}$ **et** $\mathbf{T = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}}$

d) A l'aide des formules d'Euler, montrer que : $i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{u^3 - 1}{u^3 + 1} = -\sum_{k=1}^{10} (-u^3)^k$ puis que : $4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = 2(u - u^{10})$

Soit θ un réel. On a : $i\tan(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1}$

En appliquant à $\theta = \frac{3\pi}{11}$ on a bien **:** $\mathbf{i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{u^3 - 1}{u^3 + 1} = -\sum_{k=1}^{10} (-u^3)^k}$ car $u^{11} = 1$

De même, $\mathbf{2(u - u^{10})} = 2(u - \overline{u}) = 4i\,\mathrm{Im}(u) = \mathbf{4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$

e) En déduire que : $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = i(T - S) = \sqrt{11}$

$i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = u^3 - u^6 + u^9 - u + u^4 - u^7 + u^{10} - u^2 + u^5 - u^8 + 2u - 2u^{10} = u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9 - (u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10})$ Doù : $i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = S - T$. Ainsi : $\mathbf{\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = i(T - S) = \sqrt{11}}$