

# TECHNIQUES FONDAMENTALES DE CALCUL EN ANALYSE

Ce chapitre de début d'année vise essentiellement à l'acquisition du vocabulaire, de la manipulation et des techniques de calcul principalement utilisés en Analyse. Certains éléments rencontrés dans ce chapitre seront revus plus tard dans le courant de l'année avec des définitions et des démonstrations plus rigoureuses.

## A INEGALITES DANS $\mathbb{R}$

### I) Corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, relation d'ordre

#### a) Corps des nombres réels

$\mathbb{R}$  l'ensemble des réels est muni de deux lois internes : l'**addition**  $+$  et la **multiplication**  $\times$ .

□ La loi  $+$  est **associative** ( $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x+y)+z = x+(y+z)$ ), **commutative** ( $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y = y+x$ ), **possède un élément neutre (0)** dans  $\mathbb{R}$  ( $\forall x \in \mathbb{R}, x+0 = 0+x = x$ ) et **tout élément de  $\mathbb{R}$  possède un symétrique** (l'opposé) pour la loi  $+$  ( $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; x+y = y+x = 0$ )

□ La loi  $\times$  est **associative** ( $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ ), **commutative** ( $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \times y = y \times x$ ), **distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition** ( $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x+y) \times z = x \times z + y \times z$  et  $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \times (y+z) = x \times y + x \times z$ ), **possède un élément neutre (1)** dans  $\mathbb{R}$  ( $\forall x \in \mathbb{R}, x \times 1 = 1 \times x = x$ ) et **tout élément non nul de  $\mathbb{R}$  possède un symétrique** pour la loi  $\times$  ( $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}; x \times y = y \times x = 1$ )

On résume ces résultats par la propriété suivante

**Propriété:**  $(\mathbb{R}, +, \times)$  est un corps: il est appelé **corps des nombres réels**.

#### b) Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Sur  $\mathbb{R}$ , on a la relation : " $x \leq y$ " dit " $x$  inférieur ou égal à  $y$ ". Cette relation est :

- **Réflexive** :  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$
- **Antisymétrique** :  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$
- **Transitive** :  $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

On traduit ces trois propriétés par :

**Propriété:**  $\leq$  est une relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$

#### c) Relation d'ordre et opérations du corps $\mathbb{R}$

**Définition:** On note  $\mathbb{R}^+$  l'ensemble des réels positifs i.e.  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$  et

$\mathbb{R}^-$  l'ensemble des réels négatifs i.e.  $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

**Propriété:** (i)  $\leq$  est compatible avec l'addition

(ii)  $\leq$  est compatible avec la multiplication par un réel positif

**Dem:** Admis. (i) signifie :  $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$

(ii) signifie :  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}^+, x \leq y \Rightarrow t \times x \leq t \times y$

### II) Valeur absolue

**Définition:** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On appelle **partie positive de  $x$**  et on note  $x^+$  le réel  $x$  si  $x$  est positif, i.e.  $x \in \mathbb{R}^+$ , et 0 si  $x$  est négatif, i.e.  $x \in \mathbb{R}^-$ .

**Définition:** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On appelle **partie négative de  $x$**  et on note  $x^-$  le réel 0 si  $x$  est positif, et  $-x$  si  $x$  est négatif.

**Définition:** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On appelle **valeur absolue de  $x$**  et on note  $|x|$  le réel  $x$  si  $x$  est positif, i.e.  $x \in \mathbb{R}^+$ , et  $-x$  si  $x$  est négatif, i.e.  $x \in \mathbb{R}^-$ .

**Remarque:** On a :  $x = x^+ - x^-$  et  $|x| = x^+ + x^-$

**Définition:** Soit  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ . On appelle **distance entre  $x$  et  $y$**  la valeur  $|x - y|$

**Propriété : Inégalités triangulaires** On a :  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

**Dem:**  $x \leq |x|$  et  $y \leq |y|$ . D'où  $x + y \leq |x| + |y|$ . De même,  $-x \leq |x|$  et  $-y \leq |y|$  d'où  $-(x + y) \leq |x| + |y|$   
En regroupant les deux relations, on a l'inégalité triangulaire  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

En appliquant ce résultat, on a :  $|x| = |(x+y) + (-y)| \leq |x+y| + |y|$  et  $|y| \leq |x+y| + |x|$

Ainsi  $||x| - |y|| \leq |x + y|$

### III) Intervalles de $\mathbb{R}$

**Définition:** On appelle **intervalle de  $\mathbb{R}$**  une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  telle qu'il existe  $(\alpha, \beta)$  dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ , tels que  $A$  contienne  $\{x \in \mathbb{R}; \alpha < x < \beta\}$  et soit incluse dans  $\{x \in \mathbb{R}; \alpha \leq x \leq \beta\}$   
On a 11 types d'intervalles :  $\mathbb{R}, \emptyset, \{a\} = [a, a], [a, b], [a, b[, ]a, b], ]a, b[, ]-\infty, a], ]-\infty, a[, [a, +\infty[$  et  $]a, +\infty[$

**Définition:** On appelle **segment de  $\mathbb{R}$**  un intervalle de la forme  $[a, b]$  avec  $a \leq b$

**Exercice:** Soit  $\alpha$  un réel et  $b$  un réel positif. Que dire de l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}; |x - \alpha| \leq b\}$ ?

### IV) Parties bornées

**Définition:** Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Soit  $M \in \mathbb{R}$ . On dit que  **$M$  est un majorant de  $A$**  si et seulement si :  $\forall x \in A, x \leq M$ . Une **partie est dite majorée** si elle possède au moins un majorant.

Soit  $m \in \mathbb{R}$ . On dit que  **$m$  est un minorant de  $A$**  si et seulement si :  $\forall x \in A, m \leq x$ .

Une **partie est dite minorée** si elle possède au moins un minorant.

Une **partie est dite bornée** si elle est majorée et minorée.

**Exercice:** Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ . Soit  $B = \{|x|; x \in A\}$ . Montrer que :  $A$  est bornée si et seulement si  $B$  est majorée.

**Définition:** Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Soit  $M \in \mathbb{R}$ . On dit que  **$M$  est un maximum de  $A$**  si et seulement si  $M \in A$  et  $M$  majorant de  $A$ .

**Définition:** Soit  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . Soit  $m \in \mathbb{R}$ . On dit que  **$m$  est un minimum de  $A$**  si et seulement si  $m \in A$  et  $m$  minorant de  $A$ .

**Remarque:** Une partie majorée n'a pas nécessairement de maximum.

**Remarque:** On parle aussi de "plus grand élément" et de "plus petit élément"

## B FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE

### I) Généralités sur les fonctions

#### a) Graphe

Une fonction est une application d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  (on verra plus tard des exemples dans le cas où l'ensemble d'arrivée est  $\mathbb{C}$ ).

**Définition:** Soit  $f$  une fonction à variable réelle. On appelle **ensemble de définition** de  $f$  l'ensemble des  $x$  de  $\mathbb{R}$  pour lesquels  $f(x)$  existe.

Le **graphe d'une fonction**  $f$  est l'ensemble  $\{(x,y) ; x \in D \text{ et } y = f(x)\}$  où  $D$  est l'ensemble de définition de  $f$ .

**Exercice:** Soit  $a$  un réel. Comparer au graphe de  $f$ , les graphes des fonctions :  $x \rightarrow f(x) + a$ ,  $x \rightarrow f(x + a)$ ,  $x \rightarrow f(a - x)$ ,  $x \rightarrow f(ax)$  et  $x \rightarrow a f(x)$

**Exercice:** A l'aide d'un graphe, résoudre l'inéquation :  $\sin(x) > \frac{1}{2}$

#### b) Parité

Dans ce paragraphe, le **domaine de définition  $D$  de  $f$  est symétrique par rapport à 0**, i.e., il vérifie :  $\forall x \in \mathbb{R}, x \in D \Leftrightarrow -x \in D$

**Définition:** Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$ .  $f$  est **paire**  $\Leftrightarrow \forall x \in I, f(-x) = f(x)$   
 $f$  est **impaire**  $\Leftrightarrow \forall x \in I, f(-x) = -f(x)$

**Remarque:** Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe (Oy). Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à O.

#### c) Périodicité

**Définition:** Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$ . Soit  $T$  un réel non nul. On dit que  $f$  est **périodique de période  $T$**   $\Leftrightarrow \forall x \in D, x + T$  et  $x - T$  sont dans  $D$  et  $f(x + T) = f(x)$

**Remarque:** On a alors aussi  $f(x - T) = f(x)$ .

**Remarque:** Le graphe d'une fonction périodique de période  $T$  est invariant par translations successives de vecteur  $T \cdot i$

**Remarque:** Si  $f$  est une fonction périodique de période  $T$ , elle est aussi périodique de période  $2T$ , ou  $3T$ ,...

#### d) Opérations sur les fonctions

**Définition:** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur le même ensemble  $D$ . On appelle **somme de  $f$  et de  $g$**  l'application  $h$  définie sur  $D$  par  $\forall x \in D, h(x) = f(x) + g(x)$ . On note :  $h = f + g$ .

**Définition:** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur le même ensemble  $D$ . On appelle **produit de  $f$  et de  $g$**  l'application  $\varphi$  définie sur  $D$  par  $\forall x \in D, \varphi(x) = f(x) \times g(x)$ . On note :  $\varphi = f \times g$

**Définition:** Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$ . Soit  $g$  une fonction définie sur  $\Delta$ . On suppose que  $\forall x \in D, f(x) \in \Delta$ . On appelle **composée de  $f$  par  $g$** , l'application  $\phi$  définie sur  $D$  par  $\forall x \in D, \phi(x) = g(f(x))$ . On note :  $\phi = g \circ f$ .

**Remarque:** La composition n'est pas commutative.

#### e) Monotonie

**Définition:** Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$ .

$f$  est **croissante** sur  $D \Leftrightarrow \forall (x,y) \in D^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

$f$  est **décroissante** sur  $D \Leftrightarrow \forall (x,y) \in D^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

$f$  est **strictement croissante** sur  $D \Leftrightarrow \forall (x,y) \in D^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

$f$  est **strictement décroissante** sur  $D \Leftrightarrow \forall (x,y) \in D^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

$f$  est **monotone** sur  $D \Leftrightarrow f$  est croissante sur  $D$  ou  $f$  est décroissante sur  $D$

**Proposition:** (i) La somme de deux fonctions monotones de même monotonie est une fonction monotone de même monotonie

(ii) Le produit d'une fonction monotone par un réel positif est une fonction de même monotonie

(iii) Le produit de deux fonctions monotones de même monotonie et positives est une fonction monotone de même monotonie

**Dem:** Immédiat. Attention : ne pas inventer de résultat pour les différences, le produit de fonctions non positives...

**Proposition:** La composée de deux fonctions  $f$  et  $g$  monotones est monotone.

$f \circ g$  est croissante si  $f$  et  $g$  ont même monotonie et  $f \circ g$  est décroissante si  $f$  et  $g$  ont des monotonies contraires

**Dem:** Immédiat. On décompose les quatre cas :  $f$  croissante et  $g$  croissante,  $f$  croissante et  $g$  décroissante,  $f$  décroissante et  $g$  croissante, et  $f$  et  $g$  décroissantes.

## f) Fonctions bornées

**Définition:** Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$ .  $f$  est **majorée** sur  $D \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, f(x) \leq M$

$f$  est **minorée** sur  $D \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, M \leq f(x)$

$f$  est **bornée** sur  $D \Leftrightarrow f$  est majorée et minorée sur  $D \Leftrightarrow |f|$  est majorée

**Définition:** Soit  $f$  définie sur  $D$ . On dit, si  $f$  est majorée sur  $D$ , que  $f$  admet un **maximum** (ou maximum global) sur  $D$  en  $x_0 \Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) \leq f(x_0)$ . Le maximum est **strict** si  $\forall x \in D \setminus \{x_0\}, f(x) < f(x_0)$

**Notation:** On note alors :  $\max_D(f) = \max_{x \in D}(f(x))$  le maximum  $f(x_0)$

On définit de même le **minimum**, noté  $\min_D(f)$

**Définition:** On appelle **extremum** un minimum ou un maximum.

## II) Dérivation

### a) Dérivée d'une fonction

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$  à valeurs réelles. Soit  $x_0$  un point de  $I$ .

Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $D \setminus \{x_0\}$  par :  $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  (taux de variation).

**Définition:** On dit que  $f$  est **dérivable** en  $x_0$  si  $\varphi$  possède une limite en  $x_0$ .

On appelle cette limite "**nombre dérivé en  $x_0$** " et on la note  $f'(x_0)$  (certaines fois, particulièrement en

physique on emploie également les notations  $Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ )

**Interprétation géométrique:**  $f'(x_0)$  représente la pente de la tangente, position limite des cordes. L'équation de la tangente au point d'abscisse  $x_0$  du graphe de  $f$  est :  $Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0)$

**Définition:** Si  $f$  est dérivable en tout point de  $D$ , on appelle  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

### b) Opérations sur les dérivées

**Théorème:** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $D$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels, et  $n$  un entier naturel. On suppose que  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $D$

Alors  $\lambda f + \mu g$ ,  $f \times g$  et  $f^n$  sont dérivables sur  $D$  de dérivées respectives:

$\lambda f' + \mu g'$ ,  $f' \times g + f \times g'$  et  $n f' \times f^{n-1}$

**Dem:** Admis pour le moment

**Théorème:** Si  $f$  dérivable sur  $D$  et ne s'annule pas sur  $D$ , alors l'application inverse

$\frac{1}{f}$  de  $f$  est dérivable de dérivée:  $-\frac{f'}{f^2}$

**Dem:** Admis pour le moment

**Corollaire:** Si  $f$  dérivable sur  $D$  et n'est pas nulle sur  $D$ , alors  $f^{-n}$  est dérivable et de dérivée  $-n f' \times f^{-n-1}$  (avec  $n$  entier naturel)

**Corollaire:** Si  $f$  dérivable sur  $D$  et ne s'annule pas sur  $D$ , et si  $g$  est dérivable sur  $D$ , alors le quotient de  $g$  par  $f$  est dérivable sur  $D$  de dérivée  $\frac{g'f - f'g}{f^2}$

**Corollaire:** Si  $f$  dérivable sur  $D$  et ne s'annule pas sur  $D$ , et si  $g$  est dérivable sur  $D$ , alors et si  $n$  est un entier naturel, alors le quotient de  $g$  par  $f^n$  est dérivable sur  $D$  de dérivée  $\frac{g'f - n f'g}{f^{n+1}}$

**Dem:** Admis pour le moment

**Théorème:** Soit  $f$  définie et dérivable sur  $D$ . Soit  $g$  définie et dérivable sur  $\Delta$ . On suppose que  $\forall t \in D, f(t) \in \Delta$ . Alors  $g \circ f$  est dérivable sur  $D$  et  $\forall t \in D, (g \circ f)'(t) = f'(t) \times g'(f(t))$

**Dem:** Admis pour le moment. Cas particulier : dérivées de  $\sqrt{u}$ ,  $e^u$ ,  $\ln|u|$ , ... où  $u$  dérivable...

**Remarque:** En SI et/ou en Physique-Chimie, on rencontre souvent des situations où une grandeur (vitesse, intensité électrique, allongement d'un ressort...) dépende d'une autre grandeur (par exemple une abscisse  $x$ ) elle-même dépendant d'une troisième grandeur (par exemple un instant  $t$ ).

La formule de dérivation d'une composée s'écrira par exemple sous la forme :  $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \times \frac{dx}{dt}$

**Remarque:** En SI et/ou en Physique-Chimie, on rencontre souvent des situations où une grandeur dépende de plusieurs autres grandeurs a priori indépendantes les unes des autres. Lorsque l'on veut "connaître" l'influence d'une des variables sur la grandeur initiale, on effectue des "dérivations partielles". Par exemple si  $f$  dépend de  $x, y$  et  $z$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  correspond à la dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x$ , les autres variables étant dans le calcul de dérivation considérées comme constantes.

**Exemple:** Si  $f(x,y,z) = \ln(x y) + 3 x z^4 + 7 y$  alors :  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} + 3 z^4$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} + 7$  et  $\frac{\partial f}{\partial z} = 12 x z^3$

### c) Variations d'une fonction

ATTENTION : Les résultats qui sont énoncés précisent bien que le domaine d'étude est un Intervalle. Si le domaine de définition n'est pas un intervalle, les résultats énoncés restent valables mais uniquement SUR CHAQUE INTERVALLE constituant le domaine de définition.

**Théorème:** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Alors  $f$  est constante sur  $I$  si et seulement si  $\forall t \in I, f'(t) = 0$

**Dem:** Admis pour le moment

**Théorème:** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Alors :  $f$  est croissante sur  $I$  si et seulement si  $\forall t \in I, f'(t) \geq 0$

**Dem:** Admis pour le moment

**Théorème:** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$  si et seulement si  $\forall t \in I, f'(t) > 0$  et il n'existe pas d'intervalle ouvert non vide inclus dans  $I$  sur lequel  $f'$  est la fonction nulle

**Dem:** Admis pour le moment . Remarquons que cela signifie la plupart du temps :  $f'(t) > 0$  sauf en un nombre fini de points.

**Corollaire:** Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ .

1)  $f$  est décroissante sur  $I$  si et seulement si  $\forall t \in I, f'(t) \leq 0$

2)  $f$  est strictement décroissante sur  $I$  si et seulement si  $\forall t \in I, f'(t) < 0$  et il n'existe pas d'intervalle ouvert inclus dans  $I$  sur lequel  $f'$  est la fonction nulle

Pour mieux visualiser les variations d'une fonction sur son domaine de définition, on regroupe les résultats dans un tableau appelé **"tableau de variation"**.

La première ligne est constituée des valeurs liées à la variable : point où la fonction n'est pas définie, point où la dérivée s'annule...

La seconde ligne correspond au signe de  $f'$  sur chacun des intervalles ainsi constitués.

La dernière ligne correspond aux variations de  $f$  sur ces intervalles, et l'on fera apparaître les limites ou les valeurs de  $f$  aux points de "découpage" du domaine de définition.

Attention : un tableau de variation ne doit posséder que des valeurs exactes. En cas de besoin, pour le tracé par exemple, des valeurs approchées peuvent être notées à coté ou en dessous du tableau.

Par exemple, prenons la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 12}{x^2 - 4x}$ . Cette fonction est définie et

dérivable sur  $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$ .  $\forall x \in D, f'(x) = \frac{24(2-x)}{x^2(x-4)^2}$  Son tableau de variation est alors :

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-
f(x)	$\nearrow$ 1	$+\infty$	$\nearrow$ 2	$\searrow$ $-\infty$	$\searrow$ 1

#### d) Bijection réciproque

**Définition:** Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$  à valeurs dans la partie  $A$  de  $\mathbb{R}$ . On dit que  **$f$  est une bijection de  $D$  vers  $A$**  si et seulement si pour tout élément  $y$  de  $A$ , l'équation  $f(x) = y$  d'inconnue  $x$  dans  $D$  possède une et une seule solution dans  $D$ .

**Remarque:** Le cas le plus usuel de bijection rencontrée est celui d'une fonction dérivable (continue...) sur un intervalle  $I$  et strictement monotone sur cet intervalle...

**Définition:** Soit  $f$  une bijection de  $D$  vers  $A$ . On appelle **bijection réciproque de  $f$**  la fonction  $g$  définie sur  $A$  par la relation :  $\forall y \in A, g(y)$  est l'unique valeur  $x$  de  $D$  telle que  $f(x) = y$ . On note  $f^{-1}$  cette bijection réciproque. Attention : elle n'a pas de lien avec la fonction inverse  $\frac{1}{f}$ .

**Théorème :** Les représentations graphiques d'une bijection et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite d'équation :  $y = x$ )

**Théorème:** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  bijection de  $I$  sur  $J = f(I)$ . Soit  $g : J \rightarrow I$  sa bijection réciproque. Si  $f$  dérivable sur  $I$  de dérivée non nulle sur  $I$ , alors  $g$  est dérivable sur  $J$  de dérivée vérifiant :

$$\forall x \in I, g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \text{ ou } \forall t \in J, (f^{-1})'(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))}$$

**Dem:** Admis pour le moment

#### e) Dérivée d'ordre supérieur

**Définition:** Si  $f'$  est dérivable en  $t_0$ , on appelle **dérivée seconde** de  $f$  la dérivée de la dérivée de  $f$  et on la note:  $f''(t_0)$ .  $f''$  peut encore être dérivable et on appelle  $f^{(3)}$  sa dérivée. Par itérations successives, on crée  $f^{(n)}$  la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $f$  notée aussi  $D^n f$  ou  $\frac{d^n f}{dt^n}$ . Par convention, on note  $f = f^{(0)}$

**Notation:** On note  $\mathcal{C}^n(I)$  l'ensemble des fonctions dérivables  $n$  fois sur  $I$  dont la dérivée  $n^{\text{ième}}$  est continue sur  $I$  On note  $\mathcal{C}^\infty(I)$  l'ensemble des fonctions dérivables à tout ordre sur  $I$ .

**Définition:** Si  $f \in \mathcal{C}^n(I)$ ,  $n$  fini ou infini, on dit que  **$f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$**  sur  $I$ .



### III) Etude de fonction

#### a) Réduction du domaine d'étude

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$  à valeurs réelles.

- Si  **$f$  est une fonction paire** (rappelons qu'il faut alors  $D$  symétrique par rapport à 0), alors le graphe de  $f$  est symétrique par rapport à l'axe (Oy) : il suffit d'étudier sur  $D \cap \mathbb{R}^+$  et de compléter par la symétrie d'axe (Oy) pour avoir toute la courbe.
- Si  **$f$  est une fonction impaire** (rappelons qu'il faut alors  $D$  symétrique par rapport à 0), alors le graphe de  $f$  est symétrique par rapport au point O : il suffit d'étudier sur  $D \cap \mathbb{R}^+$  et de compléter par la symétrie de centre O pour avoir toute la courbe.
- Si  **$f$  est périodique** de période  $T > 0$ , alors on obtient le graphe de  $f$  sur  $[a + T, a + 2T]$  par translation de vecteur  $\vec{T}$  de celui sur  $[a, a + T]$  avec  $a$  un réel quelconque. Aussi il suffit d'étudier  $f$  sur l'intersection de  $D$  avec un intervalle (quelconque... mais bien choisi) de longueur  $T$ .
- D'autres réductions sont encore possibles suivant les propriétés vérifiées par  $f$  : si on a  $\forall x, f(a - x) = f(x)$  ou  $f(a - x) = -f(x)$  ou  $f(a - x) = b - f(x)$ , alors le graphe de  $f$  possède une symétrie...

#### b) Asymptotes

Soit  $f$  une fonction définie sur  $D$  à valeurs réelles.

- Si  **$f$  possède une limite finie  $b$  en  $+\infty$  ou en  $-\infty$** , alors le graphe de  $f$  possède une asymptote horizontale d'équation  $Y = b$
- Si  **$f$  possède une limite infinie en  $a$**  (en  $a^+$  ou en  $a^-$ ) alors le graphe de  $f$  possède une asymptote verticale d'équation  $X = a$ .
- Si  **$f$  possède une limite infinie en  $+\infty$  ou en  $-\infty$** . Dans ce cas on étudie la limite du rapport  $\frac{f(x)}{x}$ 
  - ✓ Si ce rapport  $\frac{f(x)}{x}$  tend vers 0. On dit que le graphe de  $f$  possède une branche parabolique d'axe (Ox), le cas typique de fonction vérifiant cette propriété étant la fonction  $\sqrt{x}$
  - ✓ Si le rapport  $\frac{f(x)}{x}$  possède une limite infinie. On dit que le graphe de  $f$  possède une branche parabolique d'axe (Oy), (cas typique :  $f(x) = x^2$ )
  - ✓ Si le rapport  $\frac{f(x)}{x}$  possède une limite finie  $a$ . On étudie alors la limite de la différence  $f(x) - ax$ .
    - ✧ Si la différence  $f(x) - ax$  possède une limite finie  $b$ . Alors le graphe de  $f$  possède une asymptote oblique d'équation  $Y = aX + b$ .
    - ✧ Si la différence  $f(x) - ax$  possède une limite infinie. Alors le graphe de  $f$  possède une branche parabolique dans la direction :  $Y = aX$ . (cas typique :  $f(x) = ax + \sqrt{x}$ )
    - ✧ Si la différence  $f(x) - ax$  n'a pas de limite. On a une "direction asymptotique  $Y = aX$ " (par exemple :  $f(x) = x + \sin(x)$ )

#### c) Plan d'étude d'une fonction

Soit  $f$  une fonction à variables réelles et à valeurs réelles.

- ◆ Recherche de l'ensemble de définition  $D$
- ◆ Recherche du domaine d'étude après réductions dues aux symétries ou périodicités.
- ◆ Calcul de la dérivée et détermination du signe de celle-ci. On rappelle que pour déterminer le signe d'une expression, la méthode la plus efficace est la factorisation... mais on peut aussi être amené à étudier une fonction auxiliaire...
- ◆ On dresse le tableau de variation en précisant les différentes valeurs ou limites.
- ◆ Etude des branches infinies (peut être fait avant l'étude de la dérivée)
- ◆ Tracé de la courbe en faisant apparaître les particularités mises en évidence : asymptotes, tangentes horizontales ou verticales, symétries... On "lissera" le tracé.

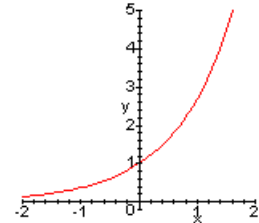
## C FONCTIONS USUELLES

### I) Fonction exponentielle

Il s'agit de la fonction :  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow \exp(t) = e^t$  (e étant le nombre de Neper).  
exp est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et vérifie :  $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \exp(x+t) = \exp(x) \exp(t)$

On a :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) = e^x$

Le graphe de exp possède une asymptote horizontale d'équation  $Y = 0$  en  $-\infty$  et une branche parabolique d'axe (Oy) en  $+\infty$



### II) Fonction logarithme

Il s'agit de la fonction:  $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow \ln(t)$  appelé logarithme népérien.

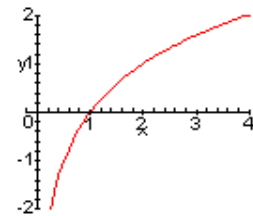
Elle est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et vérifie :  $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(xt) = \ln(x) + \ln(t)$

On a :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ln'(x) = \frac{1}{x}$

Il s'agit de la bijection réciproque de exp

Il existe d'autres fonctions logarithmes : logarithme à base a

$\log_a(t) = \frac{\ln(t)}{\ln(a)}$  avec  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$



En particulier, le logarithme décimal,  $\log_{10}$  ou Log, est la fonction :  $x \rightarrow y$  avec y tel que  $x = 10^y$ . On rencontre cette fonction en Chimie pour les calculs de pH (on a  $[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$  donc  $\text{pH} = -\text{Log}[\text{H}_3\text{O}^+]$ ) ou en SI pour les diagrammes de Bode (On utilise une échelle logarithmique en abscisses pour les fréquences, et en ordonnées on prend soit le "gain"  $10 \text{Log}(P_s/P_e)$ , soit la phase. Remarque : la fréquence de coupure est la fréquence pour laquelle le gain est de -3dB, c'est-à-dire pour laquelle  $P_s/P_e = 1/2$ , le "3" étant une valeur approchée de  $10 \text{Log}(2)$  )

### III) Fonctions puissances

Ce sont les fonctions de la forme:  $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow t^\alpha = e^{\alpha \ln(t)}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$

Toutes ces fonctions sont continues sur  $\mathbb{R}_+^*$  (sauf si  $\alpha \geq 0$  au quel cas elles sont prolongeables par continuité en 0) et dérivables sur  $\mathbb{R}_+^*$  (sauf si  $\alpha \geq 1$  auquel cas  $f_\alpha$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ )

**Remarque** : Si  $\alpha$  est un rationnel dont le dénominateur est impair, on peut prolonger la fonction sur  $\mathbb{R}$  tout entier (en utilisant les radicaux)

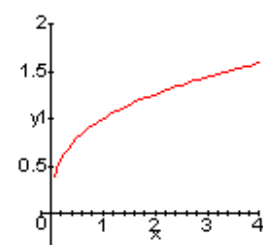
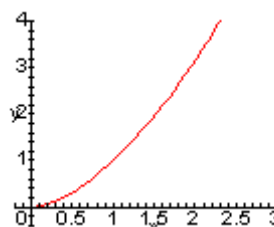
Elles vérifient :  $\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, f_\alpha(xt) = f_\alpha(x) f_\alpha(t)$  i.e.  $(xt)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$

On a également :  $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$  et  $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

On a :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

- Si  $\alpha > 0$ ,  $f_\alpha$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . C'est une bijection de  $\mathbb{R}_+$  vers  $\mathbb{R}_+$ . (En particulier la limite en  $+\infty$  est  $+\infty$  et la limite en 0 est 0) . Sa bijection réciproque est  $f_{1/\alpha}$

Les graphes sont effectués avec les valeurs  $\alpha = 5/3$  et  $\alpha = 1/3$



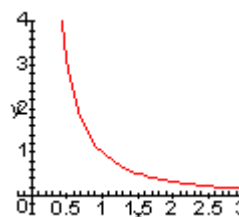


- Si  $\alpha < 0$ ,  $f_\alpha$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ . C'est une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}_+^*$ . (En particulier la limite en  $+\infty$  est 0 et la limite en 0 est  $+\infty$ ). Sa bijection réciproque est  $f_{1/\alpha}$ .

Le graphe est effectué avec la valeur  $\alpha = -5/3$

On rappelle enfin les deux résultats suivants :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$



### IV) Fonctions hyperboliques cosinus et sinus hyperboliques

On pose :  $\text{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow \frac{e^t + e^{-t}}{2}$  (cosinus hyperbolique) et  $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{2}$

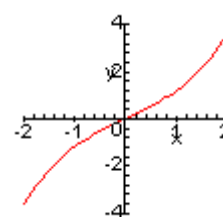
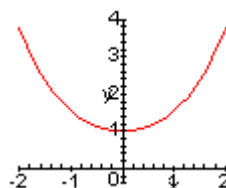
(sinus hyperbolique)

Ces fonctions sont continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$ . De plus  $\text{ch}' = \text{sh}$  et  $\text{sh}' = \text{ch}$   
 $\text{ch}$  est une fonction paire et  $\text{sh}$  est une fonction impaire.

Elles vérifient de plus :  $\forall t \in \mathbb{R}, \text{ch}(t) + \text{sh}(t) = e^t$  et  $\text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t = 1$  (En particulier la courbe paramétrée par ;  $x(t) = \text{ch}(t)$  et  $y(t) = \text{sh}(t)$  est incluse dans l'hyperbole  $X^2 - Y^2 = 1$ )

La courbe de  $\text{ch}$  s'appelle la chaînette.

**Remarque :** La courbe de  $x \rightarrow \frac{1}{2} e^x$  est asymptote aux deux courbes.



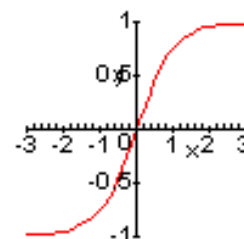
#### Tangente hyperbolique

Soit :  $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow \frac{\text{sh}(t)}{\text{ch}(t)} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$  (tangente hyperbolique)

Cette fonction est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

De plus :  $\forall t \in \mathbb{R}, \text{th}'(t) = 1 - \text{th}^2 t = \frac{1}{\text{ch}^2 t}$

C'est une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}$  vers  $]-1, 1[$



### V) Fonctions circulaires

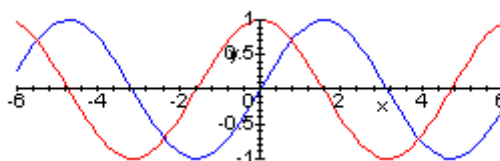
#### Cosinus et sinus

On rappelle que les fonctions  $\cos$  et  $\sin$  sont continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

On a de plus :  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$  et  $\sin'(x) = \cos(x)$

La fonction  $\cos$  est paire et la fonction  $\sin$  est impaire.

Les deux fonctions sont  $2\pi$  - périodiques et  $\pi$  - antipériodiques

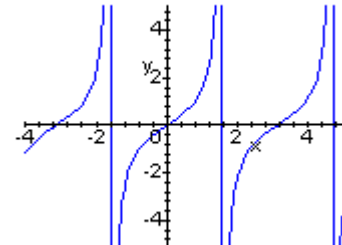


## Tangente

On appelle tangente le quotient de sin par cos. On note la fonction tan, elle est continue et dérivable sur  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$  et on a :

$$\forall x \in D, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ et } \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x)$$

Elle est impaire et  $\pi$  – périodique



## Fonctions circulaires réciproques

### arccos

La restriction de cos à  $[0, \pi]$  est une bijection strictement décroissante de  $[0, \pi]$  vers

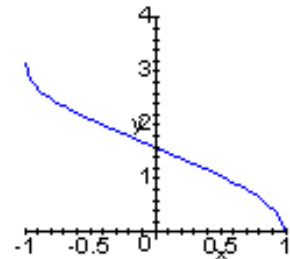
$[-1, 1[$ . Sa bijection réciproque est notée arccos

La dérivée de cos ne s'annulant pas sur  $]0, \pi[$ , la fonction arccos est dérivable sur  $] -1, 1[$  et sa dérivée vérifie :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))}$$

Or :  $\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$  et  $\sin(\arccos(x)) > 0$ .

$$\text{Ainsi : } \forall x \in ]-1, 1[, \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



### arcsin

La restriction de sin à  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  est une bijection strictement croissante de  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  vers  $[-1, 1]$ . Sa bijection réciproque est notée arcsin

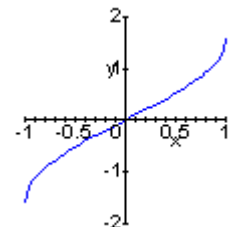
La dérivée de sin ne s'annulant pas sur  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ , la fonction

arcsin est dérivable sur  $] -1, 1[$  et sa dérivée vérifie :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Or :  $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$  et  $\cos(\arcsin(x)) > 0$ .

$$\text{Ainsi : } \forall x \in ]-1, 1[, \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



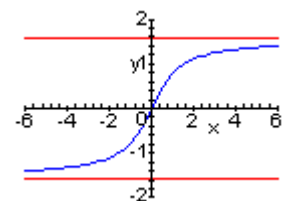
### arctan

La restriction de tan à  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  est une bijection strictement croissante de  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  vers  $\mathbb{R}$ . Sa bijection réciproque est notée arctan

La dérivée de tan ne s'annulant pas sur  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ , la fonction arctan

est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$



- Exercice:** 1) Montrer que :  $\forall x \in [-1,1], \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$
- 2) Montrer que :  $\forall x > 0, \arctan(1/x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
- 3) Etudier les parités de arccos, arcsin et arctan

## D FONCTIONS COMPLEXES

### I) Fonctions à variables réelles et à valeurs complexes

#### a) Dérivée d'une fonction à valeurs complexes

Ce sont les fonctions de la forme :  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . On peut les écrire sous la forme :  $\forall x \in A, f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$  où  $f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions à valeurs réelles. On dira que  $f$  est continue (resp. dérivable) si  $f_1$  et  $f_2$  le sont. Plus précisément, dans le cas où  $f$  est dérivable, on a :  $f' = f_1' + i f_2'$

#### b) Opérations sur les dérivées

**Théorème:** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $D$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  deux complexes, et  $n$  un entier naturel. On suppose que  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $D$

Alors  $\lambda f + \mu g$ ,  $f \times g$  et  $f^n$  sont dérivables sur  $D$  de dérivées respectives :  $\lambda f' + \mu g'$ ,  $f' \times g + f \times g'$  et  $n f' \times f^{n-1}$

**Dem:** Admis pour le moment

**Théorème:** Si  $f$  dérivable sur  $D$  et ne s'annule pas sur  $D$ , alors l'application inverse

$\frac{1}{f}$  de  $f$  est dérivable de dérivée :  $-\frac{f'}{f^2}$

**Dem:** Admis pour le moment

**Corollaire:** Si  $f$  dérivable sur  $D$  et ne s'annule pas sur  $D$ , et si  $g$  est dérivable sur  $D$ , alors le quotient de  $g$  par  $f$  est dérivable sur  $D$  de dérivée  $\frac{g'f - f'g}{f^2}$

### II) Fonction exponentielle complexe

Soit  $a \in \mathbb{C}$ . On écrit  $a = \alpha + i\beta$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

On rappelle que  $\forall t \in \mathbb{R}, e^{at} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$

**Propriété:** La fonction :  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \rightarrow e^{at}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée est la fonction :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \rightarrow a e^{at}$

**Dem:**  $f_a$  est dérivable car ses parties réelle et imaginaire sont dérivables. De plus :  $\forall t \in \mathbb{R}, f_a'(t) = \alpha e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) + \beta e^{\alpha t} (-\sin(\beta t) + i \cos(\beta t))$   
 $\Rightarrow f_a'(t) = e^{\alpha t} ((\alpha + i\beta) \cos(\beta t) + (\alpha i - \beta) \sin(\beta t)) = a e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) = a e^{at}$

**Propriété:** Si  $\varphi$  est une fonction dérivable à variables réelles et à valeurs complexes, alors la fonction  $t \rightarrow e^{\varphi(t)}$  est dérivable et sa dérivée est la fonction  $t \rightarrow \varphi'(t) e^{\varphi(t)}$

**Dem:** On travaille avec les parties réelle et imaginaire et on utilise la formule de dérivation d'une composée de fonctions réelles dérivables...

**Remarque:** En électrocinétique, comme les courants alternatifs sont en sin, on passera aux exponentielles complexes, et les lois régissant les circuits font intervenir des dérivées ou primitives des différentes grandeurs caractéristiques (charges, tensions, intensités...)

## Tableau des dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	intervalle de validité
$k$	$0$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^+$ si $\alpha \geq 1$ , $\mathbb{R}^*$ sinon
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ , $k \in \mathbb{Z}$
$\cotan x$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -(1 + \cotan^2(x))$	$]k\pi; (k+1)\pi[$ , $k \in \mathbb{Z}$
$a^x = e^{x \ln(a)}$	$(\ln a)a^x$	$\mathbb{R}$
$\log_a(x), a > 0$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	$\mathbb{R}^*_+$
$\text{ch}(x)$	$\text{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\text{sh}(x)$	$\text{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\text{th}(x)$	$\frac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x)$	$\mathbb{R}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1, 1[$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

### Opérations sur les dérivées

$$\begin{aligned}
 (\lambda u + \beta v)' &= \lambda u' + \beta v', & (uv)' &= u'v + uv', & (u \circ v)' &= v' \times (u' \circ v), & (e^u)' &= u' e^u, \\
 (\ln|u|)' &= \frac{u'}{u}, & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}, & (u^n)' &= n u^{n-1} u', & \left(\frac{u}{v^n}\right)' &= \frac{u'v - nu'v'}{v^{n+1}}, & (f^{-1})' &= \frac{1}{f' \circ f^{-1}}
 \end{aligned}$$

où  $f^{-1}$  désigne la fonction réciproque de  $f$

**Exercice:** Déterminer la dérivée de la fonction  $x \rightarrow u(x)^{v(x)}$  où  $u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables,  $u$  étant une fonction strictement positive

## E) CALCUL DE PRIMITIVES

### I) Primitives

**Définition:** Soit  $f$  continue sur un intervalle  $I$  à valeurs complexes. On appelle **primitive** de  $f$ , toute fonction  $F$  dérivable sur  $I$  telle que :  $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

**Propriété : Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.**

**Dem:** Soit  $F$  et  $G$  deux primitives de la fonction  $f$  continue sur  $I$ . Alors  $F - G$  est dérivable sur l'intervalle  $I$  et sa dérivée est nulle. Ainsi  $F - G$  est une constante.

**Théorème fondamental :** Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

Soit  $F$  la fonction :  $I \rightarrow \mathbb{C}, x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$ .

Alors  $F$  est l'unique primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$

**Dem:** Admis pour le moment

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

Soit  $H$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Alors :  $\forall x \in I, \int_a^x f(t) dt = H(x) - H(a)$

**Dem:** Admis pour le moment

**Notation**  $\int_a^x f(t) dt = H(x) - H(a)$  est noté :  $[H(t)]_a^x$

**Corollaire:** Soit  $f \in \mathcal{C}^1(I)$  et  $a \in I$ . Alors :  $\forall x \in I, f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$

### II) Calcul de primitives

#### a) Intégration par parties

**Théorème :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ . Alors on a :

$$\int_a^b f'(t) g(t) dt = [f(t) g(t)]_a^b - \int_a^b f(t) g'(t) dt$$

**Dem:** Admis pour le moment

**Exemple:** Une primitive de  $\arctan$  sur  $\mathbb{R}$ , est la fonction  $t \rightarrow t \operatorname{Arctan}(t) - \frac{1}{2} \ln(1 + t^2)$

#### b) Changement de variables

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ .

Soit  $\varphi$  une fonction de classe  $C^1$  sur un segment  $[\alpha, \beta]$  telle que  $\varphi([\alpha, \beta]) \subset I$

$$\text{Alors : } \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt$$

**Dem:** Admis pour le moment

**Pratique:** On veut calculer  $\int_a^b f(u) du$ . On cherche une fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$  et deux réels  $\alpha$  et  $\beta$

tels que  $a = \varphi(\alpha)$  et  $b = \varphi(\beta)$ . On remplace alors

\* les bornes :  $a$  par  $\alpha$  et  $b$  par  $\beta$  \* la variable  $u$  par  $\varphi(t)$  \* l'élément différentiel  $du$  par  $\varphi'(t) dt$

**Exemple 1:** On veut calculer  $\int_0^a \frac{dx}{\operatorname{ch}(x)}$ . On pose  $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln(t)$ . On a  $dx = \frac{dt}{t}$  et donc :

$$\int_0^a \frac{dx}{\operatorname{ch}(x)} = \int_1^{e^a} \frac{2 dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctan}(e^a) - \frac{\pi}{2} \quad \text{Rem : On a } 2 \operatorname{arctan}(e^a) - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctan}(\operatorname{sh}(a))$$

### III)

### IV) Tableau des primitives usuelles

$f(x)$	$\int f$ (à une constante près)	Intervalles de validité
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1} (x^{\alpha+1})$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}_+^*$ sinon
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\ln\left \frac{1}{\cos x}\right  = -\ln \cos x $	$I_k = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x $	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln\left \frac{1+x}{1-x}\right $ ou $\operatorname{argth}(x)$ (sur $] -1, 1[$ )	$] -1; 1[$ , $] 1; +\infty[$ ou $] -\infty; -1[$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ ou $-\arccos x$	$] -1; 1[$
$\frac{1}{a^2+x^2} \quad a \neq 0$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$	$\mathbb{R}$

**Quelques méthodes "importantes"**

$\frac{u'}{u}, \frac{u'}{1+u^2}, u' u \dots$

$\ln|u|, \arctan(u), \frac{1}{2} u^2 \dots$

Utilisation de l'écriture exponentielle complexe pour l'obtention des primitives de  $x \rightarrow e^{ax} \cos(bx)$  et  $x \rightarrow e^{ax} \sin(bx)$

Linéarisation des polynômes trigonométriques

Produit d'une fonction de primitive  $\mathbf{R(t) * \ln(g(t))}$ ,  $\mathbf{R(t) * \arctan(g(t))}$  avec  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{g}$  deux fractions ... simple et d'une fonction à dérivée On intégrera la fraction  $\mathbf{R}$  et dérivera le  $\mathbf{\ln}$  ou  $\mathbf{\arctan}$  rationnelle

Produit d'une exponentielle (ou  $\cos$  ou  $\sin$ ) et d'un polynôme On dérivera le polynôme et intégrera l'autre fonction

Produit d'une exponentielle et d'un **On intègre deux fois par parties**   
cosinus (ou d'un sinus)

Intégrale dépendant d'un paramètre **On essaie d'obtenir une relation de récurrence entre  $\mathbf{I_n}$  et  $\mathbf{I_{n-1}}$  ou  $\mathbf{I_{n-2}}$  ... (Type Wallis)**

Fraction rationnelle :

$\frac{AX + B}{X^2 + 2mX + n}$

Pour intégrer :  $\int_{\alpha}^x \frac{At + B}{(t^2 + 2mt + n)} dt$  : on pose  $u = m + t$

On pose  $a$  positif tel que  $a^2 = \operatorname{abs}(n - m^2)$

$\int_{\alpha}^x \frac{At + B}{(t^2 + 2mt + n)} dt = \int_{\alpha+m}^{x+m} \frac{Au + B - m}{(u^2 \pm a^2)} du$

Les termes en  $\frac{Au}{(u^2 \pm a^2)}$  donnent un  $\ln$ , ceux en  $\frac{B - m}{(u^2 \pm a^2)}$  donnent une  $\arctan$  ou une  $\operatorname{argth}$

Primitives usuelles

Intégration par parties

Changements de variables



## F) EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

### I) Equations différentielles linéaires du premier ordre

On s'intéressera aux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition:** Une équation différentielle du premier ordre est dite **linéaire** si et seulement si il existe trois fonctions continues  $a, b$  et  $c$  à valeurs dans  $K$  telles que l'équation s'écrive : (E) :  $a(x) y' + b(x) y = c(x)$

**Définition:** On appelle équation **sans second membre (ou homogène) associée à (E)** l'équation : (H) :  $a(x) y' + b(x) y = 0$

#### 1) Equation (E) : $y' = \alpha y$ , avec $\alpha$ constante complexe

**Théorème:** Les solutions de (E) sont les fonctions du type  $y_\lambda$  où  $\lambda \in \mathbb{C} : t \rightarrow \lambda e^{\alpha t}$

**Dem:** Rappel: Si  $\alpha = a + ib$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $\forall t \in \mathbb{R}, e^{\alpha t} = e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt))$

‣ D'abord la fonction  $y_1$  est bien solution de (E) .

En effet  $y_1 = f_1 + i g_1$  où  $f_1(t) = \cos(bt) e^{at}$  et  $g_1(t) = \sin(bt) e^{at}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . D'où,  $y_1'(t) = f_1'(t) + i g_1'(t)$   
Ainsi :  $\forall t \in \mathbb{R}, y_1'(t) = (-b \sin(bt) + a \cos(bt)) e^{at} + i (b \cos(bt) + a \sin(bt)) e^{at}$   
 $= (a + ib) (\cos(bt) + i \sin(bt)) e^{at} = \alpha e^{\alpha t}$  CQFD

‣ Par linéarité toutes les fonctions  $y_\lambda = \lambda y_1$  sont aussi solution

‣ Soit alors  $y$  une solution de (E). Soit  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \rightarrow e^{-\alpha t} y(t)$

$z$  est dérivable et  $\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = (y'(t) - \alpha y(t)) e^{-\alpha t} = 0$ . D'où  $z$  est constante. Soit  $\lambda$  cette constante: on a :  $y = y_\lambda$  où  $y_\lambda$  est la fonction annoncée dans l'énoncé du théorème.

#### 2) Equation (E) : $y' + a(x) y = b(x)$ , avec $a$ et $b$ deux fonctions continues

Soit  $a$  et  $b$  deux fonctions continues de l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  vers  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

**Equation (H) :  $y' + a(x) y = 0$ , avec  $a$  fonction continue**

**Théorème:** Les solutions de " $y' + a(x) y = 0$ " sont de la forme  $t \rightarrow \mu e^{-A(t)}$  où  $A$  est une primitive de  $a$  et où  $\mu$  est une constante

**Dem:** Soit  $y : I \rightarrow K$ , une fonction dérivable. Soit  $z : I \rightarrow K$  définie par :  $\forall t \in I, z(t) = y(t) e^{A(t)}$ .  $z$  est dérivable et  $\forall t \in I, z'(t) = (y'(t) + y(t) A'(t)) e^{A(t)} = (y'(t) + a(t)y(t)) e^{A(t)}$   
D'où  $y$  solution de (H) si et seulement si  $\forall t \in I, z'(t) = 0 \Leftrightarrow \exists \mu \in K | \forall t \in I, z(t) = \mu$   
 $\Leftrightarrow \exists \mu \in K | \forall t \in I, y(t) = \mu e^{-A(t)}$

**Corollaire:** Une solution de (H) différente de la fonction nulle ne s'annule jamais

Equation (E) :  $y' + a(x) y = b(x)$ , avec  $a$  et  $b$  deux fonctions continues

**Théorème:** Toute solution de (E) " $y' + a(x) y = b(x)$ " est somme d'une solution particulière de (E) et d'une solution (générale) de l'équation homogène (H)

**Dem:** Si (E) possède une solution particulière  $y_0$ . Soit  $y$  dérivable de  $I$  vers  $K$ . Soit  $z = y - y_0$   
 $y$  solution de (E)  $\Leftrightarrow \forall t \in I, y'(t) + a(t) y(t) = b(t)$

$\Leftrightarrow \forall t \in I, z'(t) + a(t) z(t) = b(t) - y_0'(t) - a(t) y_0(t) = 0 \Leftrightarrow z$  est solution de (H)

**Méthode de variation de la constante.** L'idée consiste à remarquer que les solutions de (H) sont de la forme :  $\exists \mu \in K | \forall t \in I, y(t) = \mu e^{-A(t)}$ . On va donc chercher les solutions de (E) sous cette même forme mais en ne considérant pas  $\mu$  comme une constante i.e. on cherche les solutions sous la forme :  $\forall t \in I, y(t) = z(t) e^{-A(t)}$ .

On a alors  $y'(t) = (z'(t) - a(t)z(t)) e^{-A(t)}$  d'où  $\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = z'(t) e^{-A(t)} = b(t)$

Aussi  $\forall t \in I, z'(t) = b(t) e^{A(t)}$  i.e.  $z$  est une primitive de  $t \rightarrow b(t) e^{A(t)}$  (une primitive quelconque car on peut ajouter à une solution de (E) une fonction  $t \rightarrow \mu e^{-A(t)}$  cela sera encore une solution de (E))

**Corollaire :** Le problème de Cauchy “  $y' + a(x)y = b(x)$  et  $y(t_0) = c_0$  ” possède une et une seule solution

**Dem:** Dans  $y = y_1 + \mu e^{-A}$ , il faut et il suffit de prendre  $\mu = (c_0 - y_1(t_0))e^{A(t_0)}$

**Remarque:** En physique et SI, l'équation homogène est libre au régime libre, l'équation avec second membre au régime forcé. Le régime établi est le comportement de la solution "après un certain temps", le régime transitoire est le comportement de la solution entre le moment où on a inséré ou changer le second membre et le régime établi.

### 3) Principe de superposition des solutions

**Théorème:** Soient  $a, b_1$  et  $b_2$  deux fonctions continues de  $I$  dans  $K$  et  $(E_1)$  et  $(E_2)$  les deux équations différentielles  $(E_1) : y' + a(x)y = b_1(x)$  et  $(E_2) : y' + a(x)y = b_2(x)$ . Soit enfin l'équation :  $(E) : y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$ . Alors si  $y$  est la somme d'une solution de  $(E_1)$  et d'une solution de  $(E_2)$  alors c'est une solution de  $(E)$

**Dem:** Provient de la linéarité de la dérivation

## II) Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse à l'équation  $(E) : y'' + a y' + b y = f(x)$  où  $a$  et  $b$  sont deux constantes (dans  $K$ ) et  $f$  est une somme de fonctions de la forme  $e^{\alpha x} P(x)$  où  $\alpha \in K$  et  $P$  polynôme.

### 1) Principe de superposition des solutions

**Théorème:** Soient  $(a, b) \in K^2$ ,  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions continues de  $I$  dans  $K$  et  $(E_1)$  et  $(E_2)$  les deux équations différentielles  $(E_1) : y'' + a y' + b y = f_1(x)$  et  $(E_2) : y'' + a y' + b y = f_2(x)$ . Soit l'équation :  $(E) : y'' + a y' + b y = f_1(x) + f_2(x)$ . Alors si  $y$  est la somme d'une solution de  $(E_1)$  et d'une solution de  $(E_2)$  alors c'est une solution de  $(E)$

**Dem:** Provient de la linéarité de la dérivation

**Intérêt :** On traitera des équations dont le second membre sera de la forme  $x \rightarrow e^{\alpha x} P(x)$  et on sommerá les solutions des différentes équations obtenues si le second membre est une somme de  $e^{\alpha x} P(x)$

### 2) Equation homogène (H) : $y'' + a y' + b y = 0$

**Théorème:** Soit  $(C) : X^2 + a X + b = 0$  (équation caractéristique associée à (H))

- Si  $(C)$  possède deux racines dans  $K$ ,  $r$  et  $s$ , alors les solutions de  $(H)$  sont de la forme :  $y : x \rightarrow \lambda e^{rx} + \mu e^{sx}$  avec  $(\lambda, \mu) \in K^2$
- Si  $(C)$  possède une racine double  $r$  dans  $K$ , alors les solutions de  $(H)$  sont de la forme :  $y : x \rightarrow (\lambda + \mu x) e^{rx}$  avec  $(\lambda, \mu) \in K^2$
- Dans le cas où  $K = \mathbb{R}$  et  $(C)$  admet deux racines complexes  $r = \alpha + i\beta$  et son conjugué alors les solutions de  $(H)$  sont :  $y : x \rightarrow (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) e^{\alpha x}$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

**Dem:** Si  $r \in K$  est une solution de :  $X^2 + a X + b = 0$  alors la fonction  $y_1 : x \rightarrow e^{rx}$  est solution de  $(H)$ . Soit alors  $y$  une fonction de  $I$  dans  $K$ . Comme  $y_1$  ne s'annule pas, on a peut poser la fonction  $z$  telle que  $\forall x \in I, y(x) = z(x) y_1(x)$ .

$y$  solution de (H)  $\Leftrightarrow y'' + ay' + b = 0 \Leftrightarrow (y_1'' + ay_1' + b y_1) z + (2y_1' + ay_1) z' + y_1 z'' = 0$   
 $\Leftrightarrow (2y_1' + ay_1) z' + y_1 z'' = 0 \Leftrightarrow z'' + (2r+a)z' = 0$  car  $y_1' = r y_1$  et  $y_1$  non nulle.

Aussi  $z'$  est de la forme :  $\exists \gamma \in \mathbb{K} \mid \forall x \in \mathbb{I}, z'(x) = \gamma e^{-(2r+a)x}$

De deux choses l'une : soit  $2r + a = 0$  soit  $2r + a \neq 0$

→ Si  $2r + a \neq 0$  alors  $s = -r - a \neq r$  est la seconde solution de (C) et en intégrant  $z'$  on obtient :

$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \mid \forall x \in \mathbb{I}, z(x) = \mu e^{-(r+s)x} + \lambda$  et donc  $y(x) = \lambda e^{rx} + \mu e^{sx}$ . On vérifie que toutes ces fonctions sont bien solutions de (H).

→ Si  $2r + a = 0$  alors (C) admet  $r$  pour solution double et  $z'$  est constante donc  $z$  affine donc  $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \mid \forall x \in \mathbb{I}, z(x) = \mu x + \lambda$  et donc  $y(x) = (\lambda + \mu x) e^{rx}$ .

→ Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et (C) n'a pas de solutions réelles, on écrit que les solutions réelles sont les parties réelles des solutions complexes que l'on sait donc calculer par la première méthode.

### 3) Equation (E) : $y'' + a y' + b y = e^{\alpha x} P(x)$

**Théorème:** Les solutions de (E) sont sous la forme de la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (H).

**Dem:** Cela provient encore de la linéarité

Le problème consiste à trouver une solution particulière. L'idée est de chercher cette solution particulière sous la forme :  $y : x \rightarrow e^{\alpha x} Q(x)$  où  $Q \in \mathbb{K}[X]$ . Si  $y(x) = e^{\alpha x} Q(x)$ , on a  $y'(x) = e^{\alpha x} (Q'(x) + \alpha Q(x))$  et  $y''(x) = e^{\alpha x} (Q''(x) + 2\alpha Q'(x) + \alpha^2 Q(x))$

D'où  $y$  solution de (E)  $\Leftrightarrow P(x) = Q''(x) + (2\alpha + a) Q'(x) + (\alpha^2 + a\alpha + b) Q(x)$ .

→ Si  $\alpha$  n'est pas racine de (C), on cherchera  $Q$  de degré  $\deg(P)$

→ Si  $\alpha$  est racine simple de (C), on cherchera  $Q$  de degré  $\deg(P) + 1$

→ Si  $\alpha$  est racine double de (C), on cherchera  $Q$  de degré  $\deg(P) + 2$

**Remarque:** Dans les trois cas, on obtient bien un polynôme  $Q$  (mais pas toujours un seul).

### 4) Problème de Cauchy pour (E) : $y'' + a y' + b y = c(x)$

**Théorème:** Le problème de Cauchy “  $y'' + a y' + b y = c(x), y(x_0) = y_0$  et  $y'(x_0) = y_0'$  ” possède une et une seule solution

**Dem:** On se place dans  $\mathbb{C}$  et on a deux cas:

→ Soit (C) a deux solutions  $r$  et  $s$ . Auquel cas  $y$  est de la forme :  $y = y_1 + \lambda e^{rx} + \mu e^{sx}$ . Le système d'inconnues  $\lambda$  et  $\mu$ , “  $y(x_0) = y_0$  et  $y'(x_0) = y_0'$  ” est de Cramer

→ Soit (C) a une solution double  $r$ . Auquel cas  $y$  est de la forme :  $y = y_1 + (\lambda + \mu x) e^{rx}$ . Le système d'inconnues  $\lambda$  et  $\mu$ , “  $y(x_0) = y_0$  et  $y'(x_0) = y_0'$  ” est encore de Cramer.

**Remarque:** Un système de deux équations linéaires à deux inconnues est dit de Cramer ssi il est de la forme :  $\begin{cases} a x + b y = e \\ c x + d y = f \end{cases}$  avec  $ad - bc \neq 0$ .

On peut montrer qu'un système de Cramer possède une et une seule solution

**Exemple:** Le problème de Cauchy “  $y'' - 2 y' + y = e^x$ , avec  $y(1) = 1$  et  $y'(1) = 2$  ” a pour solution  $y = \frac{1}{2} e^x (x^2 + 1)$

**Remarque:** Ces équations apparaissent en électrocinétique et en mécanique, certaines grandeurs physiques étant des dérivées d'autres grandeurs physiques. La tension autour d'une bobine dérive de l'intensité, celle autour d'une résistance est proportionnelle à l'intensité, celle autour d'un condensateur étant une primitive de l'intensité, or ces 3 tensions sont liées par la loi des mailles. En mécanique, l'accélération étant dérivée de la vitesse elle-même dérivée de la position (ou de l'allongement) ; or ces 3 grandeurs sont liées dans la RFD lorsqu'il y a un ressort par exemple et/ou des frottements linéaires.