Devoir surveillé n° 1 (4 heures)

Ce devoir est constitué d'un petit problème et de cinq exercices. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. La calculatrice est autorisée. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

Problème : Etude de la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f. Réduire le domaine d'étude par les éventuelles périodicités.
2. (a) Etudier le signe de $f(x) - \sin x$ sur $[0, \pi]$
   (b) En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $[0, \pi]$
   (c) Pour quelles valeurs de x, a-t-on $f(x) = x$?
3. (a) Etudier les variations de f.
   (b) Tracer le graphe (G) de la fonction f.
   (c) Démontrer que $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$
4. Soit h la fonction définie par : $h(x) = \text{th}(f(x)) = \text{th}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}\right)$
   (a) Déterminer le domaine de définition de h
   (b) Etudier les variations de h.
   (c) Tracer le graphe (G') de la fonction h.

Exercice 1 : Etude de la fonction $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f. Réduire le domaine d'étude par les éventuelles périodicités.
2. Etudier les branches infinies en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Etudier les autres branches infinies éventuelles de f
4. Dresser le tableau de variation de f ?
5. Tracer le graphe de la fonction f. On précisera, après étude, la pente de la tangente au point d'abscisse 1

Exercice 2 : Résolution d'une équation algèbrique à l'aide de $\tan$

Soit a un réel distinct de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1. Calculer $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan\theta$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}.$$

On pourra raisonner soit de manière algèbrique soit en utilisant la formule de trigonométrie établie en 1).

Exercice 3 : Equation $z^3+(5-2i)z^2+(13+4i)z+3(11-2i)=0$

Soit l'équation d'inconnue complexe z :

$$z^3+(5-2i)z^2+(13+4i)z+3(11-2i)=0 \text{ (E)}$$

1. Déterminer le nombre de solutions réelles de (E) ainsi que, le cas échéant, ces solutions réelles.
2. Déterminer le nombre de solutions imaginaires pures de (E) ainsi que, le cas échéant, ces solutions imaginaires pures.
3. En déduire toutes les solutions de (E)

Exercice 4 : Somme liée à $e^{\frac{2i\pi}{7}}$

Soit $u=e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose : $S=u+u^2+u^4$ et $T=u^3+u^5+u^6$

1. Calculer $S+T$ et $S\times T$
2. En déduire les valeurs de S et de T

Exercice 5 : Exercice de trigonométrie

1. Déterminer le maximum et le minimum de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)+\sqrt{6}$.
2. Déterminer les solutions de l'équation définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\sqrt{3}\cos(x)-3\sin(x)-3$
3. Déterminer le signe sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ de $\frac{3\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)+\sqrt{6}}{\sqrt{3}\cos(x)-3\sin(x)-3}$

CORRECTION

Problème I : Etude de la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}$

1. $\boxed{D_f = \mathbb{R}\ ,\ f \text{ est } 2\pi- \text{ périodique et impaire}}$. On étudie sur $[0, \pi]$ et on complète par symétrie de centre O et par translations successives de $\pm\, 2\pi\, \overrightarrow{\text{i}}$

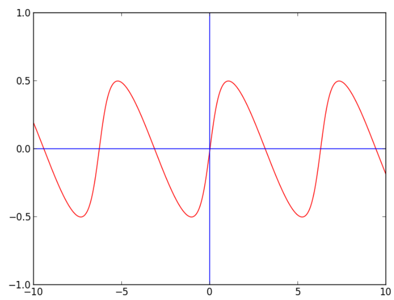
2. (a) $f(x) - \sin x = \frac{4\sin(x)(\cos x - 1)}{\sqrt{5-4\cos x}\left(1+\sqrt{5-4\cos x}\right)}$ Donc $\boxed{\forall x \in [0, \pi]\,, f(x) \leqslant \sin(x)}$

   (b) Comme sur $[0, \pi]$, on a $\sin x \leqslant x$ avec égalité ssi $x = 0$, on a alors :
   $\boxed{\forall x \in [0, \pi]\,, f(x) \leqslant \sin(x)}$

   (c) Dans l'inégalité précédente, on a égalité sssi on a égalité à chaque fois : cela ne se produit que si $\boxed{x = 0}$

3. (a) f est dérivable sur $[0, \pi]$ et on a : $\forall x \in [0, \pi]\,, f'(x) = \frac{(2-\cos x)(2\cos x - 1)}{(5-4\cos x)^{\frac{3}{2}}}$
   On en déduit le tableau de variation :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\searrow$	0

   (b)

   (c) L'étude précédente montre que $f\left([0, \pi]\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ $\boxed{f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]}$

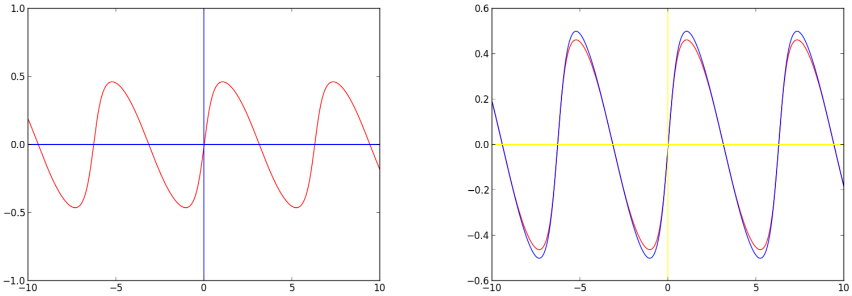
4. Soit h la fonction définie par : $h(x) = \text{th}(f(x)) = \text{th}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}\right)$

   (a) th étant définie sur $\mathbb{R}$ et f aussi, $\boxed{h \text{ est définie sur } D_h = \mathbb{R}}$. De plus, comme f étant $2\pi-$ périodique et impaire, $\boxed{h \text{ est } 2\pi- \text{ périodique et impaire}}$

   (b) th étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, les variations de h sont les mêmes que celles de f. Seules les limites changent

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\text{th}\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$\text{th}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$	$\searrow$	0

(c) On ne voit guère la différence avec le graphe de f



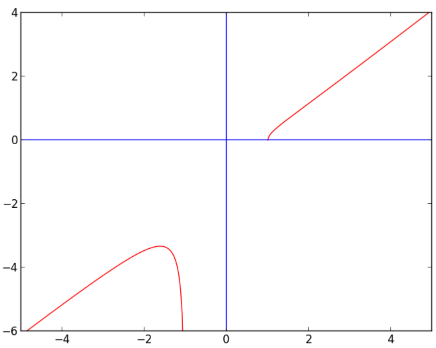
Exercice 1 : Etude de la fonction $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

1. $\boxed{D_f =]-\infty, -1[\bigcup[1, +\infty[}$.
2. On montre aisément que **le graphe de f admet la droite d'équation $Y = X - 1$ pour asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$** On peut préciser que la courbe est au-dessus de son asymptote en $+\infty$ et en-dessous en $-\infty$
3. Comme $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, le graphe de f admet une asymptote verticale d'équation $X = -1$

   En 1^+, f est continue est admet pour limite $f(1) = 0$. L'étude de la limite du taux de variation, limite qui est infinie, montre que **le graphe de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 1**
4. f est dérivable sur $D_f \setminus 1$ car produit et composée de fonctions dérivables là où elles sont définies sauf pour la fonction racine qui n'est pas dérivable en 0. On a :$\forall x \in]-\infty, -1[\bigcup]1, +\infty[\, , f'(x) = \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$ ce qui est positif sauf entre $\alpha = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} < -1$ et $\beta = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \in]-1, 1[$. On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$		0	$\nearrow$	$+\infty$

   On a $m = f(\alpha) = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{2+\sqrt{5}} = -3.33$ à 10^{-2} près



Exercice 2 : Résolution d'une équation algèbrique à l'aide de tan

1. Tout d'abord, d'après la formule de Moivre,

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta),$$

et par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \text{ et } \sin(3\theta) = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.}$$

Ensuite, $\tan(3\theta)$ et $\tan\theta$ existent $\Leftrightarrow 3\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et $\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow 3\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$. Soit donc $\theta \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

$$\tan(3\theta) = \frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)} = \frac{3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta}{\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta} = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^3\theta$.

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right),\ \tan(3\theta) = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}.}$$

2. Soit $a \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **1ère méthode.** a est bien sûr racine de l'équation proposée, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2} &\Leftrightarrow (3x - x^3)(1 - 3a^2) = (1 - 3x^2)(3a - a^3) \\ &\quad \left(\text{car } \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ne sont pas solution de l'équation}\right) \\ &\Leftrightarrow (x - a)((3a^2 - 1)x^2 + 8ax - a^2 + 3) = 0.\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme $(3a^2 - 1)x^2 + 8ax - a^2 + 3$ vaut :

$$\Delta = 64a^2 - 4(3a^2 - 1)(-a^2 + 3) = 12a^4 + 24a^2 + 12 = (2\sqrt{3}(a^2 + 1))^2 > 0.$$

L'équation proposée a donc trois racines réelles :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{a, \frac{4a - \sqrt{3}(a^2+1)}{1 - 3a^2}, \frac{4a + \sqrt{3}(a^2+1)}{1 - 3a^2}\right\}.}$$

2ème méthode. Il existe un unique réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$ tel que $a = \tan\alpha$. De même, si x est un réel distinct de $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, il existe un unique réel $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$ tel que $x = \tan\theta$ (à savoir $\alpha = \arctan a$ et $\theta = \arctan x$). Comme $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas solution de l'équation proposée, on a :

$$\begin{aligned}\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2} \Leftrightarrow \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha} &\Leftrightarrow \tan(3\theta) = \tan(3\alpha) \\ \Leftrightarrow 3\theta \in 3\alpha + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \alpha + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}.&\end{aligned}$$

Ceci refournit les solutions $x = \tan\alpha = a$, puis
$x = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}} = \frac{a + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}a} = \frac{(a + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}a)}{1 - 3a^2} = \frac{4a + \sqrt{3}(a^2+1)}{1 - 3a^2}$
et $x = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4a - \sqrt{3}(a^2+1)}{1 - 3a^2}$.

Exercice 3 : Equation $z^3 + (5 - 2i)z^2 + (13 + 4i)z + 3(11 - 2i) = 0$

On notera P le polynôme défini par :
$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 + (5 - 2i)z^2 + (13 + 4i)z + 3(11 - 2i)$

1. Soit z un réel.
z solution de (E) $\iff z^3 + (5 - 2i)z^2 + (13 + 4i)z + 3(11 - 2i) = 0$
$\iff z^3 + 5z^2 + 13z + 33 + i\left(-2z^2 + 4z - 6\right) = 0 \iff \begin{cases} z^3 + 5z^2 + 13z + 33 = 0 \\ z^2 - 2z + 3 = 0 \end{cases}$
Or l'équation $z^2 - 2z + 3 = 0$ n'a pas de solutions réelles, donc **l'équation (E) ne possède pas de solutions réelles**.

2. Soit y un réel et $z = iy$.
z solution de (E) $\iff -iy^3 - (5-2i)y^2 + (13i-4)y + 3(11-2i) = 0$
$\iff -5y^2 - 4y + 33 + i\left(-y^3 + 2y^2 + 13y - 6\right) = 0 \iff \begin{cases} -5y^2 - 4y + 33 = 0 \\ -y^3 + 2y^2 + 13y - 6 = 0 \end{cases}$
Or l'équation $-5y^2 - 4y + 33 = 0$ a pour solution -3 et $\frac{11}{5}$, et on vérifie aisément que -3 est solution de l'équation $-y^3 + 2y^2 + 13y - 6 = 0$ alors que $\frac{11}{5}$ ne l'est pas. Donc **l'équation (E) possède une et une seule solution imaginaire pure :** $-3i$.

3. D'après les questions précédentes, on peut factoriser P par $z+3i$. On a : $P(z) = (z+3i)\left(z^2 + (5-5i)z - (2\right.$
La résolution de (E') : $z^2 + (5-5i)z - (2+11i) = 0$ nécessite le calcul de son discriminant. On a : $\Delta = 8 - 6i = (3-i)^2$. On en déduit les deux solutions de (E') : $-1+2i$ et $-4+3i$. Ainsi **les solutions de l'équation (E) sont :** $-3i, -1+2i$ **et** $-4+3i$

Exercice 4 : Somme liée à $e^{\frac{2i\pi}{7}}$

Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On pose : $S = u + u^2 + u^4$ et $T = u^3 + u^5 + u^6$

1. $S+T$ est la somme des racines 7-ièmes de l'unité sauf 1. Donc $S+T=-1$.
En développant $S \times T$, on trouve : $S \times T = u^4 + u^6 + u^7 + u^5 + u^7 + u^8 + u^7 + u^9 + u^{11} = u^4 + u^6 + 1 + u^5 + 1 + u + 1 + u^2 + u^4 = S + T + 3$. D'où : $S \times T = 2$.

2. On en déduit que S et T sont les racines de l'équation $X^2+X+2 = 0$. Ainsi $\{S, T\} = \left\{\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right\}$
D'autre part : $Im(S) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) > 0$ car somme de réels positifs.
Ainsi, parmi les éléments de $\left\{\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right\}$, S est celui dont la partie imaginaire est positive.
$(S,T) = \left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right)$

Exercice 5 : Exercice de trigonométrie

1. On a $f(x) = 3\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{6} = -2\sqrt{3}\left(\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Donc, en utilisant les extremas connus de cos, on en déduit que **les extremas de f sont** $2\sqrt{3}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **et** $-2\sqrt{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2. On a : $g(x) = \sqrt{3}\cos(x) - 3\sin(x) - 3 = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Ainsi **les zéros de g constituent l'ensemble** $\left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. En utilisant les expressions précédentes que l'on transforme à l'aide de la formule trigonométrique $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$, on trouve :
$\frac{3\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{6}}{\sqrt{3}\cos(x) - 3\sin(x) - 3} = \frac{4\sqrt{3}\sin\left(\frac{x - \frac{13\pi}{12}}{2}\right)\sin\left(\frac{x - \frac{7\pi}{12}}{2}\right)}{-4\sqrt{3}\sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{6}}{2}\right)\sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}\right)}$ D'où le tableau de signe :

x	$-\pi$		$-\frac{11\pi}{12}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{12}$		π
$\sin\left(\frac{x-\frac{13\pi}{12}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\frac{7\pi}{12}}{2}\right)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$-\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{3\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)+\sqrt{6}}{\sqrt{3}\cos(x)-3\sin(x)-3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	