MPSI 14-15 Feuille n° 03 : Fonctions usuelles

Du 19/09/14 au 26/09/14

Exercice 1. Soit $(n,a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$. Calculer :
$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb), \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+kb), \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a+kb)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a+kb)$

Exercice 2. Montrer que : 1) $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$ 2) $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi$

Exercice 3. Calculer : 1) $x = \arcsin\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ en formant $\cos 4x$ 2) $\operatorname{ch}^5 x$ 3) $\cos(\arcsin x + \arcsin y)$

Exercice 4. Montrer que $\arctan(1+x) - \arctan x = \arctan\frac{1}{1+x+x^2}$ En déduire une expression simple de $S_n = \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} + ... + \arctan\frac{1}{1+n+n^2}$ ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. Montrer que $\arctan(e^x) - \arctan\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)$ est constant.

Exercice 6. Trouver les monotonies de $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ et $g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$

Exercice 7. Simplifier les expressions suivantes puis tracer les graphes des fonctions associées :

a) $f(x) = \sin(3\arcsin x)$ b) $f(x) = \arcsin(3\sin x)$ c) $f(x) = \sin(2\arctan x)$

d) $f(x) = \arcsin(\cos x) + \arccos(\sin x)$ e) $f(x) = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$

f) $f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ g) $f(x) = \arctan(\tan x)$ h) $f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

i) $f(x) = \arccos\left(\cos\frac{x}{3}\right)$ j) $f(x) = \sin(2\arcsin x)$ k) $f(x) = \arcsin(\sin 2x)$

Exercice 8. Résoudre les équations suivantes ou calculer : a) $\arcsin(x) = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

b) $A = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$ c) $B = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right)$

d) $C = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$ e) $D = \arccos\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) - 2\arctan(t)$

Exercice 9. Soit f la fonction définie par la relation : $f(y) = \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)\right)$. Déterminer le domaine de définition de f. Si $x = f(y)$, calculer $\operatorname{th}\frac{x}{2}, \operatorname{th}(x)$ et $\operatorname{ch}(x)$

Exercice 10. Prouver les inégalités suivantes (on précisera les domaines de validité).
a) $\coth(2x) = \frac{1}{2}(\operatorname{th}(x) + \coth(x))$ b) $2\arctan(\operatorname{sh}(x)) = \arctan(\operatorname{sh}(2x))$

Exercice 11. Comparer les deux fonctions définies par : $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x))$ et $g(x) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$

Exercice 12. Après avoir montré $\operatorname{th}((k+1)x) - \operatorname{th}(kx) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(kx)\times\operatorname{ch}((k+1)x)}$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\operatorname{ch}(kx) \times \operatorname{ch}((k+1)x)}$$

Exercice 13. Résoudre l'équation (d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$) : $\left(\sqrt{x}\right)^x = x^{\sqrt{x}}$

Exercice 14. Résoudre les équations : a) $\arccos(x) = \arccos(2x)$
b) $2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}} + \arcsin(2x-1) = \frac{\pi}{2}$ c)$\arctan\frac{1}{x} + \arctan\frac{1}{x-3} + \arctan\frac{1}{x+3} = \frac{\pi}{4}$

Exercice 15. a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{th}(x) = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}$ b) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}\left(2^k x\right)$

Exercice 16. Soit $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{ch}(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{sh}(kx)$