MPSI 14-15 Feuille n° 05 : Equation différentielles

Du 03/10/14 au 09/10/14

Exercice 1. On cherche toutes les fonctions dérivables f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que :

$$(E) \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, f(t+x) = f(t)f(x)$$

1. Montrer que si f vérifie (E) et s'annule en un point, alors f est la fonction nulle
2. Montrer que si f est une fonction dérivable non nulle vérifiant (E), alors la fonction $\frac{f'}{f}$ est une constante. En déduire que f est une exponentielle.

Exercice 2. Résoudre : **a)** $y' + 2y = e^{-2x} + \sin(x)$ **b)** $xy' - y - x(\sinh^3 x)y = 0$
c) $(x^2-1)y' - 2xy = x^2 + 8x + 1$ **d)** $xy' = y + x$ **e)** $y' - 5y = (x^2-1)e^x$

Exercice 3. Résoudre : **a)** $y" - 3y' + 2y = x \ \operatorname{ch}(x)$ **b)** $y" - 2y' + y = 6x \ e^x$
c) $y" + 2y' + 5y = e^{-x} \ \cos(2x)$ **d)** $y" + 2y' - 8y = 4(3x+5) \ e^{2x}$

Exercice 4. Résoudre : **a)** $y" + 4y' + 5y = \cos(x) \ \operatorname{ch}(2x)$ **b)** $y" - 2ky' + (k^2+1)y = \sin(x) \ e^x$
c) $y" - 6y' + 9y = \operatorname{sh}^3(x)$ **d)** $y" - 4y' + 4y = x \ e^x$ **e)** $y" - y = x^2 \ e^{-x}$

Exercice 5. Résoudre : **a)** $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ **b)** $2x(x-1)y' + (2x-1)y = 4x^2 - 3x$ **c)** $x(x-1)y' + y = x$

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :
a) $y" + y = \cos^2(x)$ **b)** $y" - 6y' + 9y = (3x^2+1) \ e^x$ **c)** $y" - 2y' + y = e^{|x|}$
d) $4y" + 4y' + y = x^2 + 8x + 9$ **e)** $y" + 2y' = 2x^2$ **f)** $y" - 3y' + 2y = \sin(x) + e^x$

Exercice 7. Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver les applications f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(a-x)$

Exercice 8. Mouvement oscillatoire à une dimension (ressort de raideur k>0, masse m, frottement $c \geqslant 0$) L'équation du mouvement est : $my" + cy' + ky = f(t)$ où $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

1. Résoudre l'équation dans le cas des oscillations libres i.e. lorsque f est nulle
2. Résoudre dans le cas d'oscillations forcées de la forme : $f : t \longmapsto A\cos(\omega t)$
3. Mettre en évidence le phénomène de résonance

Exercice 9. Chute libre avec frottement Un objet de masse m est lâché sans vitesse initiale. Il est soumis à la pesanteur et à une force de résistance de l'air proportionnelle à sa vitesse.

1. Déterminer l'équation du mouvement (relation fondamentale de la dynamique)
2. Intégrer cette équation différentielle. Comportement de la vitesse en $+\infty$.

Exercice 10. Cinétique chimique On met en contact à l'instant t = 0, a moles du corps A avec b moles du corps B. Ces deux corps réagissent suivant : $A + B \to C$. On suppose que la réaction est d'ordre 1 en A et 1 en B,i.e. en notant $x(t)$ le nombre de moles de C produites jusqu'à l'instant t, $x'(t) = k(a - x(t)) \times (b - x(t))$ (remarquer qu'il s'agit d'une équation à variables séparable) Déterminer $x(t)$ en supposant successivement $a = b$ puis $a > b$