MPSI 14-15 Feuille n^o 06 : Récurrence et autres raisonnements

Du 08/10/14 au 14/10/14

Exercice 1. En raisonnant par contraposition, montrer que si n_1, n_2, ..., n_9 sont 9 entiers naturels tels que $n_1+n_2+\cdots+n_9=90$. Montrer qu'il existe trois de ces entiers dont la somme est supérieure ou égale à 30

Exercice 2. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel

Exercice 3. En raisonnant par analyse-synthêse, déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x)f(y)=f(x\ y)+x+y$. (On pourra montrer que si f est solution, $f(0)=1$)

Exercice 4. Montrer : **a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 5. Soit une propriété de récurrence $P(n)$ vérifiant : $P(0)$ et $P(1)$ vraies et pour tout entier naturel n, " $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies " entraine " $P(n+2)$ vraie" . Montrer que pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\frac{1}{\sqrt{17}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n-(\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n\right)$. Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=3u_{n+1}+2u_n$. En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in\mathbb{N}$

Exercice 7. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer les sommes : **a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(n+1-k)$ **b)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (j-i)\,j$

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i\ j$ **d)** $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} (i+j)$ **e)** $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}} i\ j$ **f)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{i}{j}$ **g)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$ **h)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2^j$

Exercice 8. Montrer que : $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2\Longrightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}>\frac{3n}{2n+1}$

Exercice 9. Montrer que : $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}^*,\prod_{k=1}^{n}(2\ k)!\geqslant((n+1)^n)$

Exercice 10. En utilisant une récurrence, calculer $\displaystyle u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$

Exercice 11. Montrer que tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ peut s'écrire de manière unique sous la forme :
$n=2^p\,(2q+1)$ avec $(p,q)\in\mathbb{N}^2$

Exercice 12. Montrer que : $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N},\sum_{k=1}^{n}(k)!\leqslant(n+1)!$

Exercice 13. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, 2^n\leqslant n!\leqslant n^n$

Exercice 14. En utilisant une récurrence, calculer $\displaystyle u_n=\sum_{k=1}^{n}(k\ k!)$