Devoir surveillé N° 2 (4 heures)

Ce devoir est constitué d'un problème et de trois exercices. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. La calculatrice est interdite. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

Exercice 1 : Etude de la fonction $f(x) = \arccos(\cos(x)) + \arcsin(\cos(2x))$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arccos(\cos(x)) + \arcsin(\cos(2x))$

1. Rappeler les domaines de définition des fonctions arcsin et arccos et donner une relation liant $\arccos(x)$ et $\arcsin(x)$.
2. Déterminer le domaine de définition D_f de f. Etudier la périodicité et la parité de f.
3. (a) Déterminer une expression simplifiée de $f(x)$ lorsque $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
   (b) Faire de même pour $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
4. Déterminer une expression simplifiée de $f(x)$ sur une période (Il n'est pas dit que cette expression simplifiée est la même sur toute la période)
5. Tracer la courbe représentative de f sur au moins trois périodes.

Exercice 2 : Simplification d'une somme d'arctan

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$
   (a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
   (b) Montrer que f est constante sur chacun des intervalles constituant D_f et donner la valeur de cette constante sur chacun de ces intervalles.
2. En utilisant un des résultats de la question précédente, déterminer une expression simplifiée de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(2k^2\right)$. Déterminer la limite de T_n et celle de $\frac{T_n}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : Calcul d'intégrales

1. (a) Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $u = \tan(\theta)$.
      i. Exprimer $\cos^2(\theta)$ en fonction de u. En déduire une expression de $\cos(2\theta)$ en fonction de u.
      ii. En utilisant une expression de $\tan(2\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$, en déduire une expression de $\sin(2\theta)$ en fonction de u.
   (b) On considère l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x) + 2\sin(x) - 3}$.
   On se propose d'effectuer le changement de variables : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit $x = 2\arctan(t)$.
      i. Exprimer, à l'aide de la question précédente, dx, $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de t.
      ii. Après avoir effectué le changement de variables proposé puis écrit le dénominateur sous forme d'une somme de 2 carrés, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x) + 2\sin(x) - 3}$.
2. (a) Déterminer une primitive de la fonction $x \to \frac{x^2}{1+x^2}$
   (b) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 x\left(\arctan(x)\right)^2\, dx$

Probleme.

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par : $f_n(x) = x^n \ln(1+x)$

1. **Étude des fonctions f_n.**

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$

   (a) Étudier le sens de variation des fonctions h_n.

   (b) Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.

   (c) Étude du cas particulier $n = 1$.

      i. Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1,+\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.

      ii. En déduire les variations de la fonction f_1 sur $]-1,+\infty[$.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

      i. Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1,+\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.

      ii. En déduire les variations de f_n sur $]-1,+\infty[$. (On distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes en étudiant les branches infinies.

2. **Étude d'une suite.**

   On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$

   (a) **Calcul de U_1.**

      i. Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que : $\forall x \in [0,1], \quad \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

      ii. En déduire la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.

      iii. En déduire la valeur de U_1.

   (b) **Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$**

      i. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

      ii. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}$

      iii. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   (c) **Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$.**

   Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose : $S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$

      i. Montrer que : $S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.

      ii. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

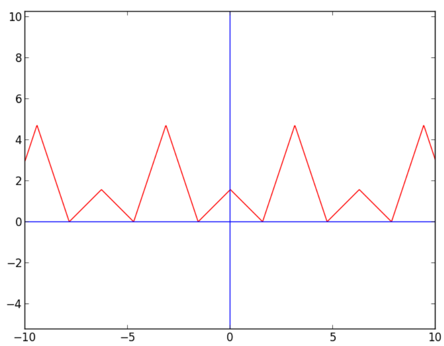
      iii. En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n, montrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right].$$

CORRECTION

Exercice 1 : Etude de la fonction $f(x) = \arccos(\cos(x)) + \arcsin(\cos(2x))$

1. arcsin et arccos sont définies sur $[-1,1]$ et vérifie : $\boxed{\forall x \in [-1,1]\,, \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}}$
2. $\boxed{\textbf{$f$ est définie sur $D_f = \mathbb{R}$, est 2π-périodique et paire}}$.
3. (a) Puisque $\forall t \in [0,\pi]\,, \arccos(\cos(t)) = t$, on trouve aisément : $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arccos(\cos(x)) = x$ et $\arcsin(\cos(2x)) = \frac{\pi}{2} - 2x$. Ainsi $\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f(x) = \frac{\pi}{2} - x}$
   (b) Puisque $\forall t \in [\pi, 2\pi]\,, \arccos(\cos(t)) = 2\pi - t$, on trouve aisément : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\arccos(\cos(x)) = x$ et $\arcsin(\cos(2x)) = -\frac{3\pi}{2} + 2x$. Ainsi $\boxed{\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], f(x) = -\frac{3\pi}{2} + 3x}$
4. En complétant l'étude faite sur $[0,\pi]$ par la parité, nous obtenons : $\boxed{\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], f(x) = \frac{\pi}{2} + x}$ et $\boxed{\forall x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right], f(x) = -\frac{3\pi}{2} - 3x}$
5. On trace sur $[-10, 10]$ intervalle contenant 3 périodes



Exercice 2 : Simplification d'une somme d'arctan

1. $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$
   (a) $\boxed{\textbf{$f$ est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$}}$.
   (b) On pose : $A = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ et $B = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$. Pour tout x dans D_f, A est dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan A$ **existe**. Par ailleurs $\tan\left(\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)$ et $\tan\left(\arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)$ existent et ne sont pas inverses l'un de l'autre, donc $\tan B$ existe aussi. De plus les formules triogonométriques permettent d'affirmer que : $\tan A = \tan B = \frac{1}{2x^2}$. Ainsi $\boxed{A \equiv B\,[\pi]}$. D'autre part :
   - Si $x \geqslant 1$ Alors $B \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $A = B$
   - Si $0 < x < 1$ Alors $B \in]0, \pi[$ donc $A = B$
   - Si $-1 < x < 0$ Alors $B \in]-\pi, 0[$ donc $A = B + \pi$
   - Si $x < -1$ Alors $B \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $A = B$

   Ainsi $\boxed{\forall x \in D_f \setminus [-1, 0]\,, f(x) = 0 \textbf{ et } \forall x \in]-1, 0[\,, f(x) = \pi}$
2. D'après la question précédente, $\forall k \in [\![1, n]\!]\,, \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)$. Ainsi :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\right)$$ et donc : $\boxed{S_n = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)}$
.
3. On en déduit que $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4}}$.
4. Á l'aide de la relation entre $\arctan x$ et $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, on trouve : $T_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(2k^2\right) = \frac{\pi}{2}\, n - S_n$.

   Donc $\boxed{\lim_{n\to\infty} T_n = +\infty}$ et $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \frac{\pi}{2}}$

Exercice 3 : Calcul d'intégrales

1. (a) Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $u = \tan(\theta)$.

   i. La double expression de la dérivée de tan fournit un rappel de la formule trigonométrique : $\cos^2(\theta) = \frac{1}{1+\tan^2(\theta)}$ i.e $\boxed{\cos^2(\theta) = \frac{1}{1+u^2}}$. Aussi : $\boxed{\cos(2\ \theta) = \frac{1-u^2}{1+u^2}}$

   ii. Comme on a $\tan(2\theta) = \frac{2\ \tan(\theta)}{1-\tan^2(\theta)} = \frac{2\ u}{1-u^2}$, on déduit de l'expression précédente que : $\boxed{\sin(2\theta) = \frac{2u}{1+u^2}}$

   (b) Soit : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x) + 2\sin(x) - 3}$.
   On effectue le changement de variables : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ soit $x = 2\arctan(t)$.

   i. On a : $\boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \textbf{ et } \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}}$

   ii. On obtient, après avoir effectué le changement de variables proposé :
   $$I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2\ dt}{-2+4t-4t^2} = -\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2\ dt}{1+(2t-1)^2} = -\Big[\arctan(2t-1)\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$
   D'où : $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x)+2\sin(x)-3} = -\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)}$

2. (a) Une primitive de la fonction $x \to \frac{x^2}{1+x^2}$ est $\boxed{x \to x - \arctan(x)}$

   (b) On intégre par parties : $\displaystyle\int_0^1 x\,(\arctan(x))^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2}(\arctan(x))^2\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}(\arctan(x))\,dx$
   Donc : $\displaystyle\int_0^1 x\,(\arctan(x))^2\ dx = \frac{\pi^2}{16} - \int_0^1 \arctan(x)\,dx + \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx$
   D'où : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 x\,(\arctan(x))^2\ dx = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}}$

Probleme

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par : $f_n(x) = x^n\ln(1+x)$

1. **Étude des fonctions f_n.**
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note h_n la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$

   (a) h_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables et
   $$h_n'(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{n+1+nx}{(1+x)^2}$$
   Et comme $x > -1$ on a $nx > -n$ et $h_n'(x) > 0$.
   Donc h_n est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$

   (b) On a : $h_n(0) = 0$, et comme h_n est strictement croissante, sur $]-1,0[$ on a :
   $\boxed{h_n < 0 \textbf{ sur }]-1,0[\textbf{ et sur }]0,+\infty[\textbf{ on a } h_n > 0}$

   (c) Étude du cas particulier $n = 1$.

   i. $f_1(x) = x\ln(1+x)$.
   Par produit et composition de fonctions dérivables, f_1 est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $f_1'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} = h_1(x)$

   ii. $\boxed{f_1 \textbf{ est strictement décroissante sur }]-1,0[\textbf{ et strictement croissante sur }]0,+\infty[.}$

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

i. Comme $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \to x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (la formule pour dériver serait différente pour la puissance 0) donc (produit et somme) f_n est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et : $f_n'(x) = x^{n-1}\left(n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) = x^{n-1}h_n(x)$

ii. Donc si n est pair, $n-1$ est impair donc

n pair :

x	-1		0		
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
x^{n-1}		$-$	0	$+$	
f_n'		$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

n impair :

x	-1		0		
$h_n(x)$		$-$	0	$+$	
x^{n-1}		$+$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

En -1, $x^n \to +1$ si n est pair et $x^n\ln(1+x) \to -\infty$ et $x^n\ln(1+x) \to +\infty$ si n impair

Dans tous les cas, **on a une asymptote verticale**.

En $+\infty$: $x^n\ln(1+x) \to +\infty$ et comme $\frac{f_n(x)}{x} \to +\infty$, on a

une branche parabolique d'axe (Oy)

2. **Étude d'une suite.**

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

(a) **Calcul de U_1.**

i. Pour comparer, on met les deux expressions sous la même forme (même dénominateur) en réordonnant par rapport aux puissances de x. On obtient :

$ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2+(b+a)x+b+c}{x+1}$

On a donc l'égalité **si** $a = 1$ et $b + a = 0$ et $b + c = 0$ soit $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$

Une autre rédaction est d'effectuer la division euclidienne de X^2 par $X+1$

Dans tous les cas : $\boxed{x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}}$

ii. On peut alors déterminer une primitive (la fonction intégrée est continue sur l'intervalle d'intégration) et $x+1 > 0$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right]_0^1$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \ln(2) - \frac{1}{2}}$.

iii. On a $U_1 = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$

et en intégrant par partie (on dérive le ln pour le faire disparaître)

$$\boxed{U_1 = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(1+x)}dx = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx = \frac{1}{4}}$$

(b) **Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.**

i. Pour monter que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone, il suffit de comparer U_n et U_{n+1}.

Comme ce sont des intégrales, on compare leurs contenus sur $[0,1]$:

$x^{n+1} - x^n = x^n(x-1) \leqslant 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et comme $\ln(1+x) \geqslant 0$ sur $[0,1]$ (car $1 + x \geqslant 1$) donc $x^{n+1}\ln(1+x) \leqslant x^n\ln(1+x)$ et comme $0 \leqslant 1$ (ordre des bornes) on a alors $\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\ln(1+x)\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\ln(1+x)\,dx$ et $U_{n+1} \leqslant U_n$.

Ainsi la suite U est décroissante

ii. Pour encadrer l'intégrale, on encadre là encore le contenu. Pour obtenir $\frac{1}{n+1}$ on conserve le x^n dans cet encadrement. On se contente donc d'encadre le ln :
Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $1 \leqslant 1+x \leqslant 2$ et comme ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et que 1, $1+x$ et 2 en sont éléments, $\ln(1) \leqslant \ln(1+x) \leqslant \ln(2)$.
Comme $x^n \geqslant 0$ alors $0 \leqslant x^n \ln(1+x) \leqslant x^n \ln(2)$
Enfin comme $0 \leqslant 1$:

$$0 \leqslant \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx \leqslant \int_0^1 x^n \ln(2)\,dx = \ln(2)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{n+1}$$

$\boxed{\textbf{D'où : } \forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}}$

iii. Et comme $\dfrac{\ln 2}{n+1} \to 0$, $\boxed{\textbf{par encadrement } U_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0}$

(c) **Calcul de U_n pour $n \geqslant 2$.**

Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose : $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k$.

i. Comme $-x \neq 1$ on a : $\boxed{S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k = \sum_{k=0}^{n}(-x)^k = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}}$

ii. On a donc en intégrant l'égalité précédente sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_{x=0}^1 = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

d'une part et d'autre part

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}\right) dx = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$$

et finalement $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx}$.

iii. On intègre U_n par parties :
$U_n = \left[\frac{x^{n+1}\ln(1+x)}{n+1}\right]_{x=0}^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}dx = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$
Donc, comme : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx = (-1)^n \left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2\right]$
on en déduit :
$\boxed{U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]}$.