Devoir en temps libre n° 2

Problème : Construction de argsh et étude d'une fonction associée

Partie I Construction de la fonction argsh

1. Montrer que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser. On note argsh l'application réciproque de sh.
2. Cette fonction argsh est-elle dérivable sur I ? Lorsque c'est possible, calculer $\operatorname{argsh}'(x)$
3. Soit ϕ définie par : $\phi(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de ϕ. Déterminer la parité de ϕ. Etudier la dérivabilité de ϕ et calculer sa dérivée lorsqu'elle est définie. En déduire que $\phi = \operatorname{argsh}$
   (b) Retrouver par un calcul direct, c'est à dire sans passer par les dérivées, le résultat précédent.

Partie II Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right)$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f
   (b) Etudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$ lorsqu'il est défini
   (c) Etudier l'existence d'une limite pour f en $+\infty$. Qu'en déduire pour le graphe de f ?
   (d) Etudier la parité de f .
2. A l'aide de la partie I, résoudre les équations : $f(x) = \frac{\pi}{4}, f(x) = \frac{\pi}{3}$ et $f(x) = \frac{\pi}{6}$
   On désigne par f_1 la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$
3. Dresser le tableau de variations de f_1. Tracer sa courbe représentative.

Partie III Construction d'une bijection

1. Montrer que la fonction f_1 est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à préciser.
2. Démontrer que l'application réciproque f_1^{-1} de f_1 est donnée par les deux formules :
   $\forall y \in J, f_1^{-1}(y) = \operatorname{argsh}\left(\frac{1}{\tan(y)}\right) = -\ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right)$
3. Soit g la fonction définie par : $g(x) = f(x)$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = f(x) + \pi$ si $x \in \mathbb{R}_-^*$ et $g(0) = \frac{\pi}{2}$
   (a) Trouver une formule donnant $g(x)$ valable sur $\mathbb{R}$ tout entier.
   (b) Démonter que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K à préciser.
4. Représenter sur une même figure les courbes représentatives de g et de g^{-1}

CORRECTION

Problème : Construction de argsh **et étude d'une fonction associée**

Partie I Construction de la fonction argsh

1. La fonction sh est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. De plus les limites de sh en $-\infty$ et en $+\infty$ sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$. Ainsi, par le théorême d'homéomorphisme, $\boxed{\textbf{sh est une bijection de } \mathbb{R} \textbf{ vers } \mathbb{R}}$.
2. sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc sa bijection réciproque argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée argsh$'$ vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(x))}$. Or la fonction ch est positive sur $\mathbb{R}$ et on a :
$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2(\operatorname{argsh}(x)) = 1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{argsh}(x)) = 1 + x^2$.
D'où : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$
3. Soit ϕ définie par : $\phi(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
   (a) Pour tout réel x, $1 + x^2 > 0$ donc $\sqrt{1+x^2}$ existe. De plus, on a :
   $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < \sqrt{1+x^2}$. Donc $\boxed{\phi \textbf{ est définie sur } \mathbb{R}}$.
   $\phi(-x) = \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = -\phi(x)$.
   Donc $\boxed{\phi \textbf{ est impaire}}$. ϕ est composée de fonctions dérivables (sauf éventuellement $\sqrt{\ }$ en 0 mais ce cas n'arrive pas ici) Donc $\boxed{\phi \textbf{ est dérivable sur } \mathbb{R} \textbf{ et : } \forall x \in \mathbb{R}, \phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$
   Ainsi, les fonctions argsh et ϕ ont la même dérivée sur $\mathbb{R}$. Mais comme $\operatorname{argsh}(0) = 0 = \phi(0)$, on en déduit qu'elles sont égales : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$
   (b) On peut retrouver ce résultat en exprimant directement $\phi o \operatorname{sh}$. En effet :
   $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(\operatorname{sh}(x)) = \ln\left(\operatorname{sh}(x) + \sqrt{\operatorname{sh}^2(x)+1}\right) = \ln(\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x)) = \ln(e^x) = x$. Ainsi $\phi o \operatorname{sh} = Id_{\mathbb{R}}$ i.e. $\boxed{\operatorname{argsh} = \phi}$

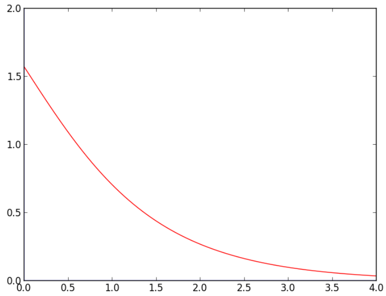
Partie II Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right)$

1. (a) $\frac{1}{\operatorname{sh}}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{f \textbf{ est définie sur } \mathbb{R}^*}$
   (b) $\boxed{f \textbf{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$ comme composée de fonctions dérivables sur leur ensemble de définition. De plus on a : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}}$
   (c) En composant les limites, on a : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+}$.
   Ainsi $\boxed{\textbf{le graphe de } f \textbf{ admet une asymptote horizontale d'équation } Y = 0}$, la courbe étant au dessus.
   (d) Comme composée de fonctions impaires, $\boxed{f \textbf{ est impaire}}$.
2. $\underline{f(x) = \frac{\pi}{4}} \iff \arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right) = \frac{\pi}{4} \iff \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} = 1$ $\left(\text{car } \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right) \text{ aussi}\right)$
   $\iff \operatorname{sh}(x) = 1 \iff x = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$ $\boxed{\textbf{D'où : } f(x) = \frac{\pi}{4} \iff x = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$
   $\underline{f(x) = \frac{\pi}{3}} \iff \arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right) = \frac{\pi}{3} \iff \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} = \sqrt{3}$ $\left(\text{car } \frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right) \text{ aussi}\right)$
   $\iff \operatorname{sh}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff x = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ $\boxed{\textbf{D'où : } f(x) = \frac{\pi}{3} \iff x = \frac{1}{2}\ln(3)}$
   $\underline{f(x) = \frac{\pi}{6}} \iff \arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right) = \frac{\pi}{6} \iff \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\left(\text{car } \frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } \arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right) \text{ aussi}\right)$
   $\iff \operatorname{sh}(x) = \sqrt{3} \iff x = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$ $\boxed{\textbf{D'où : } f(x) = \frac{\pi}{6} \iff x = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)}$

3. Soit f_1 la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_1'(x) = -\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$. On en déduit le tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	||	$-$
$f_1(x)$	|| $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$ 0



Partie III Construction d'une bijection

1. L'étude précédente montre que la fonction f_1 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, continue sur cet intervalle et les limites de f_1 en 0 et $+\infty$ sont respectivement $\frac{\pi}{2}$ et 0, donc :

   $\boxed{f_1 \textbf{ est une bijection de } \mathbb{R}_+^* \textbf{ sur } J = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in J = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

   $f_1(x) = y \iff \arctan\left(\frac{1}{\mathrm{sh}(x)}\right) = y \iff \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \tan(y)$ (car tan est bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}_+^*$)

   $\iff \mathrm{sh}(x) = \frac{1}{\tan y} \iff x = \mathrm{argsh}\left(\frac{1}{\tan y}\right) = \ln\left(\frac{1}{\tan y} + \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 y}}\right)$

   Or : $\frac{1}{\tan y} + \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 y}} = \frac{1}{\tan y}\left(1 + \sqrt{1 + \tan^2 y}\right) = \frac{1}{\tan y}\left(1 + \frac{1}{\cos y}\right) = \frac{1}{\tan \frac{y}{2}}$

   (remarque : on a utilisé $\tan(y) > 0$ et $\cos(y) > 0$)

   $\boxed{\textbf{D'où : } f_1^{-1}(y) = \mathrm{argsh}\left(\frac{1}{\tan y}\right) = -\ln\left(\tan \frac{y}{2}\right)}$

3. Soit g la fonction définie par : $g(x) = f(x)$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = f(x) + \pi$ si $x \in \mathbb{R}_-^*$ et $g(0) = \frac{\pi}{2}$
   (a) En utilisant l'expression donnant $\arctan \frac{1}{x}$ en fonction de $\arctan(x)$, on trouve aisément : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\mathrm{sh}(x))}$
   (b) La fonction $x \longmapsto \mathrm{sh}(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et la fonction $t \longmapsto \frac{\pi}{2} - \arctan(t)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0, \pi[$, donc par composition, $\boxed{g \textbf{ est une bijection de } \mathbb{R} \textbf{ vers }]0, \pi[}$.

4. Les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$ sont celles de f_1. Ensuite, on écrit que comme $\forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = \pi - g(x)$ le graphe de g est symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Enfin le graphe de g^{-1} s'obtient à partir de celui de g par symétrique d'axe (Ox)