Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 3

Problème : Equation différentielle du premier ordre

1. Soit f_0 définie par : $f_0(x) = \frac{x}{1+x^2} \ln|x|$.
   Étudier les variations de la fonction f_0 (On montrera en particulier que f_0' s'annule pour deux valeurs positives de x : $\alpha \in]0,1[$ et $\beta \in]1,+\infty[$ et pour ce faire on sera amené à étudier la fonction définie par $\phi(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} + \ln|x|$) Donner l'aspect de la courbe représentative de f_0

2. Montrer qu'il existe 3 réels a, b et c (et déterminer les valeurs de ces réels) tels que, pour tout $x \neq 0$, $\frac{1-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$
   En déduire les primitives de $x \longmapsto \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}$ sur l'intervalle I, avec $I =]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$

3. On considére l'équation différentielle :
   $$x\left(1+x^2\right)y' - \left(1-x^2\right)y = x \tag{1}$$
   (a) Sur quels intervalles résout-on (1) ? (On proposera deux intervalles notés pour la suite I_1 et I_2)
   (b) Soit (H) l'équation homogéne associée à (1). Résoudre (H) sur I_1 et sur I_2
   (c) Vérifier que la fonction f_0 étudiée précédemment, est une solution de (1) sur I_1 et sur I_2
   (d) Résoudre (1) sur I_1 et sur I_2 .

4. (a) Montrer qu'il existe une unique application g_1 de $]-\infty,0[$ vers $\mathbb{R}$, que l'on précisera, solution de (1) sur $]-\infty,0[$ et telle que $g_1(-1) = 1$
   (b) Montrer qu'il existe une unique application g_2 de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$, que l'on précisera, solution de (1) sur $]0,+\infty[$ et telle que $g_2(1) = 0$
   (c) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ g_2(x) & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$
   Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$. g est-elle une solution de (1) sur $\mathbb{R}$?
   (d) Existe-t-il des solutions sur (1) sur $\mathbb{R}$? (Si Non dire pourquoi, si Oui quelles sont toutes les solutions)

5. (a) Si h_1 est une solution de (1) sur $]0,+\infty[$, que dire de la limite de h_1 en $+\infty$?
   (b) Si h_2 est une solution de (1) sur $]-\infty,0[$, que dire de la limite de h_2 en $-\infty$?
   (c) Tracer quelques courbes intégrales