MPSI 14-15 Feuille n° 07 : Coefficients binomiaux et Systèmes linéaires

Du 16/10/14 au 14/10/14

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations :

1. $\binom{n}{5} = 17\binom{n}{4}$
2. $\binom{2n+4}{3n-1} = \binom{2n+4}{n}$
3. $\binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{3} = 87n$

Exercice 2. En utilisant la formule de Newton sur $(1+x)^n$ avec des valeurs de x bien choisies ou en transformant (par exemple en dérivant), simplifier les sommes suivantes : **a)** $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ **c)** $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$ **d)** $\sum_{k=0}^{n} k\,(k-1) \binom{n}{k}$ **e)** $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ **f)** $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

Exercice 3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0, u_1 = 1$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Montrer que : $\forall\,(n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_{p+k} = u_{p+2n}$

Exercice 4. Montrer que : $\forall\,(n,p) \in \mathbb{N}^2,\ p \leqslant n \Rightarrow \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

1. pa récurrence sur n avec p fixé.
2. en écrivant : $\binom{k+1}{p+1} = \binom{k}{p+1} + \binom{k}{p}$ pour $p+1 \leqslant k \leqslant n$.

Exercice 5. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme double : $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$

Exercice 6. Résoudre les systèmes linéaires suivants, (discuter selon les valeurs de a, b et c) :

1. $\begin{cases} 3x + y & = 0 \\ 6x + 2y + z & = 2 \\ 9x + 3y + 7z & = 14 \end{cases}$
2.

$$\begin{cases} x - 3y + z & = 1 \\ 2x + y - z & = -1 \\ x + 11y - 5z & = 5 \end{cases}$$

3. $\begin{cases} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{cases}$

4.
$$\begin{cases} 2x + 3y + z &= 4 \\ x + y - 2z &= 1 \\ x + 4y + z &= 1 \end{cases}$$

5. $\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 4 \\ 3x + 4y + 5z &= a \end{cases}$

6.
$$\begin{cases} x + y + z &= a \\ x + 2y + 3z &= b \\ x + 3y + 4z &= b \end{cases}$$

7. $\begin{cases} ax + y &= 1 \\ x + ay &= 1 \end{cases}$

8.
$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 11 \\ 2x + 5y - 4z &= 13 \\ 4x + 11y &= 37 \end{cases}$$

9. $\begin{cases} a\ x + y + 3z &= 3 \\ (a-1)x + a\ y + z &= 1 \end{cases}$