DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 3

EXERCICE : EQUATION DIFFERENTIELLE DU PREMIER ORDRE

1) Soit f_0 définie par $f_0(x) = \frac{x}{1+x^2}\ln|x|$ Etudier les variations de la fonction f_0 (On montrera en particulier que f_0' s'annule pour deux valeurs positives de x : $\alpha \in]0,1[$ et $\beta \in]1,+\infty[$) Donner l'aspect de la courbe représentative de f_0

f_0 est définie sur $\mathbb{R}^*$ et est impaire. On étudiera sur $]0,+\infty[$ et on complétera le graphe par symétrie de centre 0.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = 0$ (par comparaison des puissances et des logarithmes) et $\lim\limits_{x\to 0} f_0(x) = 0$ (car x ln|x| tend vers 0 lorsque x tend vers 0)

f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_0'(x) = \dfrac{(1+x^2)+(1-x^2)\ln|x|}{(1+x^2)^2}$

On pose φ la fonction définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ par $\varphi(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2} + \ln|x|$

On sait que, sur $\mathbb{R}^*$, $f_0'(1) = \frac{1}{2}$ et $f_0'(x)$ est du signe de $(1-x^2)\,\varphi(x)$ sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$

φ est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et on a : $\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $\varphi'(x) = \dfrac{(1+x^2)^2}{x(1-x^2)^2}$.

Ainsi φ est strictement croissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

Or φ est continue sur $]0,1[$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x) = +\infty$.

Donc par le théorème d'homéomorphisme, φ réalise une bijection strictement croissante de $]0,1[$ vers $\mathbb{R}$

De même, φ est strictement croissante et continue sur $]1,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty$, donc φ réalise une bijection strictement croissante de $]1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$

En particulier **il existe un unique couple $(\alpha,\beta) \in]0,1[\times]1,+\infty[$ tel que $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$** et de plus on a (par monotonie...) : $\forall x \in]0,\alpha[\cup]1,\beta[$, $\varphi(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha,1[\cup]\beta,+\infty[$, $\varphi(x) > 0$.

On en déduit le tableau de variation de f_0 sur $\mathbb{R}_+$:

x	0		α		β		$+\infty$
$f_0'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_0(x)$	0	$\searrow$	$f_0(\alpha)$	$\nearrow$	$f_0(\beta)$	$\searrow$	0

2) Montrer qu'il existe 3 réels a, b et c (et déterminer les valeurs de ces réels) tels que, pour tout $x \neq 0$, $\frac{1-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$

En déduire les primitives de $x \to \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}$ sur l'intervalle I, avec $I =]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$

Par décomposition en éléments simples, on sait qu'il existe un unique triplet (a,b,c) de réels tel que : pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{1-x^2}{x(1+x^2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{1+x^2}$. On obtient en utilisant la méthode classique **: $a = 1$, $b = -2$ et $c = 0$**

Donc la fonction : **$x \to \ln|x| - \ln(1+x^2)$ est une primitive** de $x \to \dfrac{1-x^2}{x(1+x^2)}$ sur $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$

3) On considère l'équation différentielle : (L) $x(1+x^2)\,y' - (1-x^2)\,y = x$

a) Sur quels intervalles résout-on (L) ? (On proposera deux intervalles notés pour la suite I_1 et I_2)

Pour se ramener au cas usuel " $y' + a(x)\,y = b(x)$ " avec a et b continues sur I, il faut travailler sur **$I =]-\infty,0[= I_1$ ou $I =]0,+\infty[= I_2$** L'équation (L) devient alors : $y' - \dfrac{1-x^2}{x(1+x^2)}\,y = \dfrac{1}{(1+x^2)}$

b) Soit (H) l'équation homogène associée à (L). Résoudre (H) sur I_1 et sur I_2

L'équation (H) est : $y' - \dfrac{1-x^2}{x(1+x^2)}\,y = 0$. D'après la question 2) et la forme générale des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre, on sait que **les solutions de (H) sont les fonctions $y_\lambda : I \to \mathbb{R}$, $x \to \lambda\dfrac{x}{1+x^2}$ avec λ une constante.**

c) Vérifier que la fonction f_0 étudiée précédemment, est une solution de (L) sur I_1 et sur I_2

On avait montré à la question 1 que : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_0'(x) = \dfrac{(1+x^2)+(1-x^2)\ln|x|}{(1+x^2)^2}$

Or $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \ln|x| = \dfrac{f_0(x)\,(1+x^2)}{x}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f_0'(x) = \dfrac{x+(1-x^2)f_0(x)}{x(1+x^2)} = \dfrac{1-x^2}{x\,(1+x^2)} f_0(x) + \dfrac{1}{1+x^2}$

Ainsi f_0 est une solution de (L) sur I_1 et sur I_2

d) Résoudre (L) sur I_1 et sur I_2 .

Puisque les solutions de (L) sur I s'écrivent comme somme d'une solution particulière de (L) sur I et d'une solution de (H), **les solutions de (L) sur I sont donc les fonctions :**

$f_\lambda : I \to \mathbb{R},\ x \to \dfrac{x}{1+x^2}(\ln|x| + \lambda)$ avec λ une constante

4) a) Montrer qu'il existe une unique application g_1 de $]-\infty, 0[$ vers $\mathbb{R}$, que l'on précisera, solution de (L) sur $]-\infty, 0[$ et telle que $g_1(-1) = 1$

Par unicité de la solution au problème de Cauchy sur $I_1 =]-\infty, 0[$: $\begin{cases} y' = \dfrac{1-x^2}{x\,(1+x^2)}y + \dfrac{1}{1+x^2} \\ y(-1) = 1 \end{cases}$, **il existe une unique fonction g_1 solution de (L) sur I_1 et telle que $g_1(-1) = 1$**.

Comme on sait qu'il existe une constante $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in I_1,\ g_1(x) = \dfrac{x}{1+x^2}(\ln|x| + \lambda_1)$, on déduit de la relation $g_1(-1) = 1$, **que la constante λ_1 vaut -2**.

Ainsi g_1 est la fonction : $g_1 : I_1 \to \mathbb{R},\ x \to \dfrac{x}{1+x^2}(\ln|x| - 2) = f_0(x) - 2\dfrac{x}{1+x^2}$

b) Montrer qu'il existe une unique application g_2 de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$, que l'on précisera, solution de (L) sur $]0, +\infty[$ et telle que $g_2(1) = 0$

Par unicité de la solution au problème de Cauchy sur $I_2 =]0, +\infty[$: $\begin{cases} y' = \dfrac{1-x^2}{x\,(1+x^2)}y + \dfrac{1}{1+x^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$, **il existe une unique fonction g_2 solution de (L) sur I_2 et telle que $g_2(1) = 0$**.

Comme on sait qu'il existe une constante $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in I_2,\ g_2(x) = \dfrac{x}{1+x^2}(\ln|x| + \lambda_2)$, on déduit de la relation $g_2(1) = 0$, **que la constante λ_2 vaut 0**.

Ainsi g_2 est la fonction : $g_2 : I_2 \to \mathbb{R},\ x \to \dfrac{x}{1+x^2}\ln|x| = f_0(x)$

c) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} g(x) = g_1(x) & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ g(0) = 0 & \\ g(x) = g_2(x) & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$ Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$. g est-elle une solution de (L) sur $\mathbb{R}$?

Puisque l'on sait que les limites à gauche et à droite en 0 de la fonction f_0 sont nulles, on en déduit que les limites à droite et à gauche de g existent et valent 0 qui est g(0). **Ainsi g est continue en 0**.
Or g étant solution de (L) sur I_1 et sur I_2, g est dérivable (donc continue) sur ces intervalles donc sur $\mathbb{R}^*$. **Aussi g continue sur $\mathbb{R}$**

Or g n'est pas dérivable en 0 car $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = -\infty$ (rem : on a aussi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x} = -\infty$)

Ainsi g n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ et n'est donc pas une solution de (L) sur $\mathbb{R}$

d) Existe-t-il des solutions sur (L) sur $\mathbb{R}$

Il n'y a pas de solution sur $\mathbb{R}$ car quelle que soit la solution f_λ sur I_1 la limite en 0 de f_λ vaut 0 et celle du taux de variation $\dfrac{f_\lambda(x) - 0}{x}$ vaut $-\infty$: aucune solution sur I_1 ne possède un prolongement dérivable en 0 donc aucune solution sur I_1 ne possède un prolongement dérivable sur $\mathbb{R}$

5) a) Si h_1 est une solution de (L) sur $]0, +\infty[$, que dire de la limite de h_1 en $+\infty$?

Par comparaison des puissances et des logarithmes **on a $\lim\limits_{x\to+\infty} h_1(x) = 0$**

b) Si h_2 est une solution de (L) sur $]-\infty, 0[$, que dire de la limite de h_2 en $-\infty$?

Par comparaison des puissances et des logarithmes **on a $\lim\limits_{x\to-\infty} h_2(x) = 0$**

c) Tracer quelques courbes intégrales Les réels α et β vus dans le 1) ont pour valeurs approchées : $\alpha = 0{,}3$ à 10^{-2} près et $\beta = 3{,}31$ à 10^{-2} près

courbes_intégrales