Devoir en temps libre n° 4

Problème : Quelques résultats sur la suite de Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

1. Déterminer la liste des 10 premiers nombres de Fibonacci (de F_1 à F_{10})
   Écrire un programme Python permettant de calculer le n$^{\text{ième}}$ terme de la suite de Fibonacci. Calculer F_n pour n égal á $100 - j - m$ où j est le jour de votre date de naissance et m le mois de naissance (indiquez ces données sur votre copie).

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 6 \Longrightarrow F_n > n$. Qu'en déduit-on pour la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \Longrightarrow F_n < F_{n+1} \leqslant 2F_n$.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$.

5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n\, F_{n+1}$.

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} F_k\, F_{k+1} = F_{2n}^2$.

7. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ et $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$.

8. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 2n-k \\ k \end{pmatrix} = F_{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 2n+1-k \\ k \end{pmatrix} = F_{2n+2}$

9. Montrer que, si on pose $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_{n-1} + \alpha F_n = \alpha^n$

10. Montrer que, si on pose $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$