ℝ CORPS DES NOMBRES REELS

I) Ensembles de nombres usuels

a) Entiers naturels

ℕ est l'ensemble des **entiers naturels** {0, 1, 2, 3….}. Il y a un plus petit élément : 0. Tous ces entiers naturels sont classés et deux entiers naturels successifs diffèrent de 1. Il est stable par addition et multiplication mais pas par soustraction (ou division). On a vu quelques propriétés issues de l'axiomatique de Peano :

- **Toute partie non vide de ℕ a un plus petit élément.**
- **Toute partie non vide et majorée de ℕ a un plus grand élément**

b) Entiers relatifs

ℤ l'ensemble des **entiers relatifs** est constitué des entiers nautrels et des opposés des entiers naturels. Il est stable par addition, multiplication et soustraction mais pas par division. Toute partie non vide de ℤ majorée possède un plus grand élément, toute partie non vide et minorée possède un plus petit élément.

c) Nombres décimaux

𝔻 l'ensemble des **nombres décimaux** est constitué des quotients entre un entier relatif et une puissance de 10. $\mathbb{D} = \left\{\frac{n}{10^p} \mid n\in\mathbb{Z},\ p\in\mathbb{N}\right\}$. Ces nombres ont une représentation décimale finie.

d) Nombres rationnels

ℚ l'ensemble des **nombres rationnels** est constitué des quotients entre deux entiers relatifs dont le dénominateur est non nul. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}^*\right\}$. On verra que l'on peut écrire ces rationnels sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux, c'est-à-dire sans autres diviseurs communs que 1 et – 1. Cette forme est appelée forme irréductible du rationnel.

Ces nombres ont une représentation décimale finie ou infnie et périodique à partir d'un certain rang.

ℚ est stable par addition, multiplication, soustraction et division par un rationnel non nul.

e) Nombres réels

ℝ l'ensemble des **nombres réels** est constitué des "nombres usuels" pouvant repérés un point sur une droite graduée. Il est constitué des nombres rationnels et des irrationnels (réels non rationnels).

II) Approximation d'un réel

a) Partie entière

Théorème: $\forall x \in\mathbb{R}, \exists! n \in\mathbb{Z} \mid n \leq x < n+1$

Dem: On rappelle une propriété de l'axiomatique de Peano: toute partie non vide de $\mathbb{N}$ et majorée possède un plus grand élément. Cette propriété reste vraie en changeant $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $A = \{p \in \mathbb{Z} \mid p \leq x\}$. A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ donc elle admet un (unique) plus grand élément n. On a alors $n \in A$ et $n+1 \notin A$: d'où $n \leq x < n+1$.

Définition: Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit l'unique entier n tel que $n \leq x < n+1$. On appelle cet entier n **la partie entière de x** et on note : $n = E(x) = \lfloor x \rfloor$

b) Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n}

Définition: Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **valeur approchée à 10^{-n} de x par défaut** l'unique réel μ vérifiant : $10^n\mu \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq x - \mu < 10^{-n}$

Définition: Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle **valeur approchée à 10^{-n} de x par excès** l'unique réel β vérifiant : $10^n\beta \in \mathbb{Z}$ et $0 < \beta - x \leq 10^{-n}$

Remarque: On a bien l'existence et l'unicité : $\mu = 10^{-n} E(10^n x)$ et $\beta = \mu + 10^{-n}$

III) Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème: Tout intervalle]a,b[non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$.

Dem: Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a<b$. On a $b-a>0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^* \mid {}^1/_n < b-a$: n existe il suffit de prendre $E({}^1/_{(b-a)})+1$.

→ Supposons $a \geq 0$ Soit $E = \{k \in \mathbb{N} \mid k > an\}$. E est non vide (car la suite $(k)_k$ diverge vers $+\infty$) et possède donc un plus petit élément p. On montre alors que ${}^p/_n \in]a,b[$.
En effet: $p-1 \leq na < p$ car p est le plus petit élément. donc : ${}^p/_n \leq a + {}^1/_n < a + (b-a) = b$.
Et ${}^p/_n > a$. Ainsi ${}^p/_n$ est un rationnel inclus dans]a,b[.

→ Supposons $a < b \leq 0$ Alors on travaille avec a' = -b et b' = -a. On trouve un rationnel dans]a',b'[donc son opposé est un rationnel dans]a,b[.

→ Supposons $a < 0 < b$ Alors 0 est un rationnel dans]a,b[

→ Supposons $a = 0 < b$ Alors soit $a' = {}^b/_2$. On trouve un rationnel dans $]a',b[\subset]a,b[$

→ Supposons $a < 0 = b$ Alors soit $b' = {}^a/_2$. On trouve un rationnel dans $]a,b'[\subset]a,b[$

Remarque: Un corollaire important de ce résultat est que tout intervalle non vide et non réduit à un point possède une infinité de rationnels

Théorème: Tout intervalle]a,b[non vide de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Dem: On sait qu'il existe un irrationnel strictement positif λ. (par exemple $\sqrt{2}$).
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a<b$. D'après le théorème précédent, il existe au moins un couple de rationnels (α,β) tel que $a < \alpha < \beta < b$. Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda < n(\beta-\alpha)$.
On sait alors que $\alpha + {}^\lambda/_n$ est un irrationnel appartenant à $]\alpha,\beta[$ donc à]a,b[.

Remarque: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Démontrons ce résultat par l'absurde:
Si $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, on pourrait l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible ${}^p/_q$.
Mais alors $p^2 = 2q^2$. Aussi p^2 est un entier pair et donc p est pair . Aussi $\exists p' \in \mathbb{Z} \mid p = 2p'$.
En remplaçant dans l'équation précédente, on a $q^2 = 2p'^2$ donc q^2 est pair et ainsi q est pair.
Mais alors p et q étant tout deux pairs ne sont pas premiers entre eux
Contradiction avec ${}^p/_q$ fraction irréductible... $\sqrt{2}$ est irrationnel.

IV) Borne supérieure et borne inférieure

Définition: Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que **M est un majorant de A** si et seulement si : $\forall x \in A, x \leq M$.

Soit $m \in \mathbb{R}$. On dit que **m est un minorant de A** si et seulement si : $\forall x \in A, m \leq x$

Si l'ensemble des majorants de A possède un plus petit élément, alors ce plus petit élément est appelé **borne supérieure de A**. On le note **sup(A)**

De même, **inf(A) la borne inférieure de A** est le plus grand des minorants

Propriété: (admise) **Toute partie non vide majorée de ℝ admet une borne supérieure.**

Propriété: (admise) **Toute partie non vide minorée de ℝ admet une borne inférieure.**

Caractérisation de la borne supérieure.

Propriété: Soit A une partie non vide majorée de ℝ. Soit μ un majorant de A. Alors : $\mu = \sup(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists x \in A \mid \mu-\varepsilon < x \leq \mu$

Dem: * Si $\mu = \sup(A)$. $\forall\varepsilon>0$, $\mu-\varepsilon$ n'est pas un majorant de A: $\exists x \in A \mid \mu-\varepsilon < x$

* Si μ est tel que $\forall \varepsilon>0, \exists x \in A \mid \mu-\varepsilon < x \leq \mu$. Soit M = sup(A). Supposons $M \neq \mu$. Comme M est le plus petit des majorants, on a $M < \mu$. Soit alors $\varepsilon = \mu-M >0$. On sait alors $\exists x\in A \mid \mu-\varepsilon < x$ i.e. $\exists x\in A \mid M < x$. Ceci contredit le fait que M soit un majorant de A. Ainsi $\mu = M$.

Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$

On adjoint à ℝ deux éléments notés $+\infty$ et $-\infty$. On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty , -\infty\}$.

Définition: $\overline{\mathbb{R}}$ s'appelle **la droite réelle achevée.**

On a alors la propriété suivante :

Propriété: Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet des bornes supérieure et inférieure.

V) Intervalles de ℝ

Définition: On appelle **intervalle de ℝ** une partie A de ℝ telle qu'il existe (α,β) dans $\overline{\mathbb{R}}$, tels que A contienne $\{x\in\mathbb{R}, \alpha<x<\beta\}$ et soit incluse dans $\{x\in\mathbb{R}, \alpha\leq x\leq\beta\}$

On a 10 types d'intervalles : ℝ, $\varnothing$, [a,b], [a,b[,]a,b],]a,b[,]-∞,a],]-∞,a[, [a,+∞[et]a,+∞[

Définition: On appelle **segment de ℝ** un intervalle de la forme [a,b] avec $a\leq b$

Définition: On appelle **partie convexe de ℝ** une partie A de ℝ qui vérifie :

$\forall(x,y)\in A^2$ avec $x\leq y$, $[x,y] \subset A$.

Théorème: Les parties convexes de ℝ sont les intervalles de ℝ.

Dem: $\Rightarrow$ Les intervalles sont convexes.

Soit I un intervalle, par exemple prenons I =]a,b]. Soit $(x,y)\in I^2$ avec $x\leq y$.

On a $[x,y] = \{z \in\mathbb{R} \mid x \leq z \leq y\}$. Donc $\forall z \in[x,y]$, $a < x \leq z \leq y \leq b \Rightarrow z \in]a,b]$.

On fait de même avec les autres types d'intervalle.

$\Leftarrow$ Les parties convexes de ℝ sont des intervalles.

Soit A une partie convexe de ℝ. Si A est vide c'est un intervalle.

Sinon supposons, par exemple que A soit majorée et non minorée. A admet donc une borne supérieure μ. On va montrer qu'alors A est soit $]-\infty,\mu]$ soit $]-\infty,\mu[$. Ceci revient à montrer que : $]-\infty,\mu[\subset A \subset]-\infty,\mu]$.

$\rightarrow A \subset]-\infty,\mu]$. Etant donné que μ est un majorant de A, on a $\forall x \in A, x \leq \mu$ i.e. $x\in]-\infty,\mu]$

$\rightarrow]-\infty,\mu[\subset A$. Soit $x\in]-\infty,\mu[$.

x n'est pas un minorant de A (car A non minorée..) donc : $\exists u \in A \mid u < x$

x n'est pas un majorant de A (car $x < \mu = \sup(A)$) donc : $\exists v \in A \mid x < v$

Or A est convexe donc $[u,v] \subset A$. En particulier $x \in A$.

On étudie de même les cas où A est minorée et non majorée, ou minorée et majorée etc..