SUITES NUMERIQUES

La notion de suite est connue depuis les Grecs (algorithme d'ARCHIMEDE (287 – 212 av J.C.) pour calculer une valeur approchée de Pi). Par contre, la notion de limite était mal appréciée et cette méconnaissance a donné lieu à de nombreux paradoxes (par exemple le paradoxe de la tortue et d'Achille, établi par ZENON D'ELEE (V^e siècle av J.C.)). Plusieurs analystes, et en particulier CAUCHY (1789 – 1857) travaillèrent sur des critères de convergence, mais la définition rigoureuse de convergence nécessitait une définition de $\mathbb{R}$: ce n'est qu'après ces travaux sur $\mathbb{R}$ que WEIERSTRASS (1815-1897) put donner cette définition de convergence.

I) Généralités sur les suites réelles

Définition: Une **suite numérique** est une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note S(K) l'ensemble des suites à valeurs dans K.

1) Suites bornées

Définition dans S($\mathbb{R}$): Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(\mathbb{R})$.

U est **majorée** $\Leftrightarrow \exists\, k\in\mathbb{R} \mid \forall n \in\mathbb{N},\ u_n \le k$

U est **minorée** $\Leftrightarrow \exists\, k'\in\mathbb{R} \mid \forall n \in\mathbb{N},\ k' \le u_n$

U est **bornée** $\Leftrightarrow$ U est majorée et minorée $\Leftrightarrow \exists\, k\in\mathbb{R}^+ \mid \forall n \in\mathbb{N},\ |u_n| \le k$

Définition dans S($\mathbb{C}$): $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(\mathbb{C})$ est **bornée** $\Leftrightarrow \exists\, k\in\mathbb{R}^+ \mid \forall n\in\mathbb{N},\ |u_n| \le k$

Algèbre des suites bornées

Notation: On note B($\mathbb{R}$) l'ensemble des suites réelles bornées. On note de même B($\mathbb{C}$) l'ensemble des suites complexes bornées.

En utilisant les inégalités triangulaires et la norme d'un produit dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on voit que:

- ☞ La somme de deux suites bornées est une suite bornée
- ☞ Le produit de deux suites bornées est une suite bornée
- ☞ Le produit d'une suite bornée par un scalaire est une suite bornée

2) Suites monotones

On se place **dans S($\mathbb{R}$)** .

Définition: Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(\mathbb{R})$.

U est **croissante** $\Leftrightarrow \forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\ \left(n \le p \Rightarrow u_n \le u_p \right) \Leftrightarrow \forall n \in\mathbb{N},\ u_n \le u_{n+1}$

U est **strictement croissante** $\Leftrightarrow \forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\ \left(n < p \Rightarrow u_n < u_p \right) \Leftrightarrow \forall n \in\mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$

U est **décroissante** $\Leftrightarrow \forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\ \left(n \le p \Rightarrow u_n \ge u_p \right) \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ u_n \ge u_{n+1}$.

U est **strictement décroissante** $\Leftrightarrow \forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\ \left(n < p \Rightarrow u_n > u_p \right) \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$

U est **monotone** $\Leftrightarrow$ U est croissante ou est décroissante.

U est **strictement monotone** $\Leftrightarrow$ U est strictement croissante ou strictement décroissante.

U est **stationnaire** $\Leftrightarrow$ il existe un rang p tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \left(n \ge p \Rightarrow u_n = u_p \right)$

II) Suites réelles convergentes et suites réelles divergentes

1) Convergence et divergence

Définition: Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(\mathbb{R})$. On dit que U est **convergente** $\Leftrightarrow$

$\exists\, l\in\mathbb{R} \mid \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ n \ge n_0 \Rightarrow \left| u_n - l \right| \le \varepsilon$.

Remarque: On peut remplacer "$\left| u_n - l \right| \le \varepsilon$" par "$\left| u_n - l \right| < \varepsilon$" mais le programme demande $\le$.

Théorème: Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors le nombre l rentrant dans la définition est unique.

Définition: Cet unique l est appelé **limite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et on note : $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. On pourra également noté : $u_n \to l$

Dem: Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et qu'il existe deux éléments distincts l et l' tels que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$ **(1)** et $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow |u_n - l'| \leq \varepsilon$ **(2)**

Prenons $\varepsilon = \frac{|l - l'|}{4}$. On a bien $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ car on suppose $l \neq l'$.

Ainsi d'après **(1)** $\exists n_1\in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$ et d'après **(2)** : $\exists n_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow |u_n - l'| \leq \varepsilon$

Soit $n_0 = \sup(n_1,n_2)$. On a $\forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow (|u_n - l| \leq \varepsilon$ et $|u_n - l'| \leq \varepsilon)$.

Or : $l - l' = l - u_n + u_n - l'$. D'où : $|l - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - l'|$. Ainsi $\forall n \geq n_0$, $|l - l'| \leq 2\varepsilon = \frac{|l - l'|}{2}$ ce qui est impossible si $|l - l'| > 0$. On obtient donc une contradiction avec l'hypothèse de départ et donc le théorème est montré.

Remarque: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \Leftrightarrow \forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*, \exists n_0\in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$

Définition: Soit $U \in S(\mathbb{R})$. On dit que U est **divergente** sssi elle n'est pas convergente.

Définition: Soit $U \in S(\mathbb{R})$. On dit que U **diverge vers + ∞** si et seulement si :
$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq M$. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Définition: Soit $U \in S(\mathbb{R})$. On dit que U **diverge vers – ∞** si et seulement si :
$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq M$. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Remarque: Il y a plusieurs façons de diverger : si $u_n = n$, (u_n) diverge vers $+\infty$; si $u_n = (-1)^n$, (u_n) diverge en oscillant de 1 à –1 ; si $u_n = \sin(n)$, (u_n) diverge en restant dans $[-1,1]$; si $u_n = (-1)^n n$, (u_n) diverge en s'éloignant indéfiniment dans $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ ...

Remarques: * Soit $U \in S(\mathbb{R})$ et $l\in \mathbb{R}$. Dire que la suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l équivaut à dire que la suite $(u_n - l)$ converge vers 0.

** Le caractère asymptotique (converger vers une certaine limite ou pas) d'une suite ne dépend pas des premiers termes : c'est un caractère local.

Théorème: Toute suite convergente est bornée.

Dem: Soit $U\in S(\mathbb{R})$ de limite $l\in\mathbb{R}$. Fixons $\varepsilon>0$, par exemple $\varepsilon = 1$.
Alors $\exists n_0 \in\mathbb{N} \mid \forall n \in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq 1 = \varepsilon$. On fixe un tel n_0.
Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$. On a $|u_n| \leq |u_n - l| + |l| \leq 1 + |l| = A$.
Soit $A' = \sup\limits_{0 \leq n \leq n_0-1} |u_n|$: A' existe et est fini car on prend le sup d'un nombre fini de réels. On a pour $n < n_0$, $|u_n| \leq A'$
Soit alors $B = \sup\{A,A'\}$. On a $\forall n \in\mathbb{N}$, $|u_n| \leq B$ en regroupant les deux inégalités précédentes. Ainsi (u_n) est bornée.

Théorème: Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l > 0$, alors il existe un rang à partir duquel $u_n > 0$.

Exercice: En utilisant une démonstration du même style, montrer que si U est une suite de réels qui converge vers une limite l strictement positive alors il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont strictement positifs.

2) Opérations algébriques sur les limites

Théorème: Soient $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de $\mathbb{R}$ de limites respectives l et m.

a) La suite $W = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} = U + V$ est convergente de limite $l + m$

b) La suite $P = (p_n)_{n\in\mathbb{N}} = U \times V$ est convergente de limite $l \times m$

c) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. La suite $Q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda.U$ converge vers $\lambda.l$

Dem: **a)** Soit $s = l + m$. $\forall n \in\mathbb{N}$, $w_n - s = (u_n - l) + (v_n - m)$.
Ainsi $\forall n \in\mathbb{N}$, $|w_n - s| \leq |u_n - l| + |v_n - m|$. Fixons $\varepsilon>0$. $\exists n_1\in\mathbb{N}\mid\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ et $\exists n_2\in\mathbb{N}\mid\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_1 \Rightarrow |v_n - m| \leq \varepsilon'$.
Ainsi, si on pose $n_0 = \sup(n_1,n_2)$, on a : $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow |w_n - s| \leq \varepsilon$. Ainsi W converge vers s.

b) Soit $p = l\times m$. $\forall n \in\mathbb{N}$, $p_n - p = m(u_n - l) + u_n(v_n - m)$.
Ainsi $\forall n \in\mathbb{N}$, $|p_n - p| \leq |m|\,|u_n - l| + |u_n|\,|v_n - m|$. Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc bornée. Soit $K>0$ un majorant de $(|u_n|)$ et de $|m|$
On a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|p_n - p| \leq K(|u_n - l| + |v_n - m|)$. Fixons $\varepsilon>0$. $\exists n_1\in\mathbb{N}\mid\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2K}$ et $\exists n_2\in\mathbb{N}\mid\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_1 \Rightarrow |v_n - m| \leq \varepsilon'$
Ainsi, si on pose $n_0 = \sup(n_1,n_2)$, on a : $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow |p_n - p| \leq \varepsilon$. P converge vers p.

c) La suite Q est la suite produit de la suite constante égale à λ (qui converge vers λ) et de la suite U : on utilise donc le résultat du **b)**

Espace vectoriel des suites qui convergent vers 0

Théorème: Le produit d'une suite convergeant vers 0 par une suite bornée convergea vers 0.

Dem: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite nulle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée . Soit K>0 un majorant de $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a $\forall n \in\mathbb{N}$, $|u_n v_n| = |u_n|\,|v_n| \le K\,|u_n|$. Soit $\varepsilon>0$. On pose $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{K}$.
On sait : $\exists n_0\in\mathbb{N}|\forall n\in\mathbb{N}, n\ge n_0 \Rightarrow |u_n| \le \varepsilon'$. Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}, n\ge n_0 \Rightarrow |u_n v_n| \le \varepsilon$. CQFD

Quotient de deux suites

Théorème: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $l \ne 0$. Alors :

1) Il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont non nuls
A partir de ce rang n_0, on peut donc définir la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des inverses des u_n
2) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite $\frac{1}{l}$

Dem: 1) $l \ne 0$. On considère $k = |l| \in\mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon = \frac{k}{2}$. $\exists n_0\in\mathbb{N}|\forall n\in\mathbb{N}, n\ge n_0 \Rightarrow |u_n-l| \le \varepsilon$

Or $u_n = (u_n-l) + l$ d'où $|u_n| \ge \Big|\,|u_n-l| - |l|\,\Big|$. D'où $n \ge n_0 \Rightarrow |u_n| \ge \varepsilon = \frac{k}{2}$. Ainsi $\forall n \ge n_0$, $u_n \ne 0$

2) $v_n - \frac{1}{l} = \frac{l-u_n}{l\,u_n}$. Ainsi pour $n\ge n_0$, comme on a $|u_n| \ge \frac{|l|}{2}$, on a également $\left| v_n - \frac{1}{l} \right| \le \frac{2|l-u_n|}{|l|^2}$

Soit alors $\varepsilon>0$ et $\varepsilon' = \frac{\varepsilon\,|l|^2}{2}$. $\exists\, n_1\in\mathbb{N} \mid \forall n \in\mathbb{N}, n\ge n_1 \Rightarrow |u_n-l| \le \varepsilon'$.

On pose $n_2 = \sup(n_0,n_1)$. On a bien : $\forall n \in\mathbb{N}, n\ge n_2 \Rightarrow \left| v_n - \frac{1}{l} \right| \le \varepsilon$ D'où $\lim(v_n) = \frac{1}{l}$

Corollaire: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limite respectives l et m. Si $m\neq 0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ $|\ \forall n\ge N$, $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ existe et la suite $(w_n)_{n\ge N}$ converge et a pour limite $\frac{l}{m}$

Dem: Il suffit d'écrire : (w_n) produit de (u_n) et de l'inverse de (v_n) .
On peut regrouper les résultats précédents dans un tableau (on pourra montrer en exercice les résultats donnés pour les suites réelles divergeant vers $+\infty$ ou $-\infty$)
Ne figurent pas dans ce tableau les formes indéterminées 1^∞, ∞^0, 0^0 qui s'obtiennent à partir des autres

lim u_n	**lim v_n**	**lim (u_n+v_n)**	**lim (u_nv_n)**	**lim $\frac{u_n}{v_n}$**
l	m	l + m	l m	$\frac{l}{m}$ si $m \ne 0$
m	0	m	0	**F.I.** (sauf si v_n a un signe constant à partir d'un certain rang)
m	$\varepsilon\,\infty$, avec $\varepsilon = \pm1$	$\varepsilon\,\infty$	$\varepsilon\,\infty$ si m>0 $-\varepsilon\,\infty$ si m<0 **F.I.** si m=0	0
$+\infty$	0	$+\infty$	**F.I.**	**F.I.** (sauf si v_n a un signe constant à partir d'un certain rang)
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**F.I.**
$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**	$-\infty$	**F.I.**
0	$\varepsilon\,\infty$	$\varepsilon\,\infty$	**F.I.**	0
0	0	0	0	**F.I.**
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

3) Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre

Théorème: Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes de limites respectives a et b avec a<b. Alors $\exists N \in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow a_n < b_n$

Dem: Soit h = b-a > 0. Soit $\varepsilon = \frac{h}{3}$. D'après les convergences de (a_n) et (b_n), on sait :

$\exists n_0 \in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon$ et $\exists n_1 \in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow |b_n - b| \leq \varepsilon$

Ainsi si N = sup (n_0,n_1), on a $\forall n \in\mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow a_n \leq a + \varepsilon < a + \frac{h}{2} = \frac{a+b}{2} = b - \frac{h}{2} < b - \varepsilon \leq b_n$

Théorème: Passage à la limite dans une inégalité large : Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes de limites respectives a et b. On suppose que : $\exists N \in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow a_n \leq b_n$. Alors $a \leq b$

Dem: Supposons par l'absurde que a>b. D'après le théorème précédent,
$\exists n_1\in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq b_n$ ce qui contredit l'hypothèse sur les suites (a_n) et (b_n).

Remarque: Le théorème est faux avec les inégalités strictes (cf. (0) et $\left(\frac{1}{n+1}\right)$)

Convergence par encadrement

Théorème: Convergence par encadrement ou théorème des gendarmes:

Soient trois suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

H1 : $\exists N\in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n$.

H2 : Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent

H3 : Les limites l' et l'' de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont identiques et valent l.

Conclusion : Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite l.

Dem: Supposons **H1**, **H2** et **H3** et considérons l'entier N donné par **H1**.
On a : $\forall n\in\mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |v_n - l| \leq \sup(|u_n - l|,|w_n - l|)$
Soit ε>0. On sait d'après les convergences de (u_n) et de (w_n) que :
$\exists n_0\in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$ et $\exists n_1\in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow |w_n - l| \leq \varepsilon$
D'où en prenant $n_2 = \sup(n_0,n_1,N)$ on a $\forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow |v_n - l| \leq \varepsilon$ Ainsi (v_n) converge et sa limite est l.

Remarque: Il ne faut pas oublier **H3**.

Exemple: * $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$. Or $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n$,

d'où: $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}$. Or $\lim\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = 1 = \lim\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\right)$ donc (u_n) converge vers 1

** $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$

En utilisant : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $n+1 \leq n+k \leq 2n$, on montre : $\frac{n}{2n} \leq u_n \leq \frac{n}{n+1}$ .Or ces deux suites "encadrantes" n'ont pas la même limite donc on ne peut pour l'instant rien dire de la convergence de (u_n) . En fait il faut utiliser les sommes de Riemann et on montre que (u_n) converge et sa limite est ln(2).

Théorème : Divergence par minoration: Soient deux suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

H1 : $\exists N\in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n$. **H2 : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$**

Conclusion : Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Dem: Supposons **H1** et **H2** et considérons l'entier N donné par **H1**.
Soit M $\in\mathbb{R}$. D'après la divergence de (u_n) vers $+\infty$: $\exists n_0\in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq M$
Soit $n_1 = \sup(N,n_0)$. On a : $\forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow v_n \geq M$: Ainsi v_n diverge vers $+\infty$.

Théorème: Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels telles que :

H1 : $\exists N\in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq v_n$. **H2 : La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0**

Conclusion : Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Dem: Supposons **H1** et **H2** et considérons l'entier N donné par **H1**.
Soit ε>0. On sait d'après la convergence de (v_n) que : $\exists n_0\in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |v_n| \leq \varepsilon$
Aussi en prenant $n_1 = \sup(n_0,N)$ on a $\forall n\in\mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon$ Ainsi (u_n) converge et sa limite est 0.

Corollaire Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers l . Alors la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$

Dem: On applique le résultat précédent en remarquant : $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$

III) Théorèmes fondamentaux sur les suites

Théorème de la limite monotone

Théorème: Théorème de la limite monotone

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels. Alors :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est majorée.

Le cas échéant, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la borne supérieure de $U = \{u_0, u_1, u_2,.., u_n, ...\}$.

Dem: $\Rightarrow$ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Soit l sa limite. On a alors :

- $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \le l$ car (u_n) croissante. En effet si : $\exists p\in\mathbb{N} \mid u_p > l$ alors $\forall n\ge p$, $u_n - l \ge u_p - l > 0$ donc $(u_n - l)$ ne pourrait converger vers 0. En particulier l majorant de U (1)
- Soit $\varepsilon>0$. Comme (u_n) converge vers l, $\exists p\in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}, n\ge p \Rightarrow l - \varepsilon \le u_n \le l + \varepsilon$. Aussi, comme (u_n) majorée par l, $\forall n\in\mathbb{N}, n\ge p \Rightarrow l - \varepsilon \le u_n \le l$. En particulier, $\forall\varepsilon>0, \exists t\in U \mid l - \varepsilon \le t \le l$ (2)
  De (1) et (2) on déduit que l est la borne supérieure de U.

$\Leftarrow$ Si (u_n) majorée. Alors U est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ (les majorants de U sont les majorants de la suite (u_n)).
U admet donc une borne supérieure que l'on notera M.
Soit $\varepsilon>0$. Par la caractérisation de borne supérieure dans le cas réel, il existe $t\in U$ tel que :
$M - \varepsilon \le t \le M$. Or $t\in U$, donc $\exists p\in\mathbb{N} \mid t = u_p$. De plus , comme (u_n) croissante, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge p \Rightarrow u_n \ge u_p$.
On a alors : $\forall n\in\mathbb{N}, n\ge p \Rightarrow M - \varepsilon \le u_n \le M$ (car M majore (u_n)) Ainsi la suite (u_n) converge vers M.

Corollaire 1: Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minorée.

Corollaire 2: Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non majorée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Dem: Immédiat : pour le 1) on travaille avec l'opposée de (u_n) qui est croissante.
Pour le 2) , on écrit que l'on a la contraposée d'un des sens de l'équivalence montrée.

Suites adjacentes

Définition: Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels . On dit que **les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes** ssi : $\exists p\in\mathbb{N} \mid (u_n)_{n\ge p}$ croissante et $(v_n)_{n\ge p}$ décroissante et si $\lim\limits_{+\infty}(v_n-u_n) = 0$

Théorème: Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Dem: Quitte à changer les indices on peut considérer p=0. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
On a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) + (u_n - u_{n+1}) \le 0$. Ainsi $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.
De plus $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.Ainsi 0 minore $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n \ge 0$ i.e. $u_n \le v_n$.
Ainsi, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_0 \le u_n \le v_n \le v_0$. D'où
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante majorée donc converge (vers l_1) . De même $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers l_2).
Mais alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l_2 - l_1$. Or $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc $l_2 = l_1$

Remarque: On a alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \le l \le v_n$

Dichotomie

Principe: On considère le segment $I_0 = [a_0, b_0]$. Soit $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

On a deux segments $[a_0, c_0]$ et $[c_0 , b_0]$. On en choisit un : on le note $I_1 = [a_1 , b_1]$.
Puis on considère $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ et on choisit un segment parmi $[a_1, c_1]$ et $[c_1 , b_1]$ celui qui répond à la question que l'on se pose (par exemple qu'une certaine valeur est dans l'intervalle) et on le notera $I_2 = [a_2 , b_2]$ et on réitère le procédé.
On crée ainsi deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles la valeur cherchée est dans l'intervalle $I_n = [a_n , b_n]$ pour tout n. Les suites convergent donc vers la valeur cherchée.

IV) Suites extraites

Soit φ une injection croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (φ est strictement croissante).
Par récurrence immédiate on montre que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n) \ge n$.

Définition : Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(\mathbb{R})$. On appelle **suite extraite de (u_n)** (et associée à l'extractrice φ) la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall p\in\mathbb{N}$, $v_p = u_{\varphi(p)}$.

Proposition: Toute suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ extraite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente est convergente et a la même limite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Dem: Soit l la limite de (u_n) et φ l'extractrice donnant (v_p). Soit $\varepsilon>0$.
$\exists n_0\in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$.
Or $\forall n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$. En particulier $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow \varphi(n) \geq n_0 \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - l| = |v_n - l| \leq \varepsilon$
Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Remarque: La réciproque du théorème est vraie si elle s'énonce " Si une suite est telle que toutes ses suites extraites convergent alors elle converge".
Par contre si on l'énonce : " Si une suite est telle qu'une de ses suites extraites converge alors elle converge" cette réciproque est fausse.

Exemple: Soit $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. (u_n) diverge car deux de ses suites extraites convergent mais vers des limites distinctes.

Proposition: Soit une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite l. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers l

Dem: Soit $\varepsilon>0$. Il existe p et q tels que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow |u_{2n} - l| \leq \varepsilon$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq q \Rightarrow |u_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$
On pose $n_0 = \sup(2p, 2q+1)$. On a alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Théorème de Bolzano - Weierstrass

Théorème de Bolzano - Weierstrass: De toute suite bornée de réels on peut extraire une sous-suite convergente.

Dem: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Soit $I_0 = [a_0, b_0]$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \in I_0$
Soit $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$. Dans $[a_0, c_0]$ ou $[c_0 , b_0]$, il y a une infinité de termes u_n (pour être plus précis : il y a une infinité de n tel que $u_n \in[a_0, c_0]$ ou il y a une infinité de n tel que $u_n \in[c_0, b_0]$)
Soit alors I_1 un de ces segments ayant une infinité de termes u_n : $I_1 = [a_1 , b_1]$.
Soit $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Dans $[a_1, c_1]$ ou $[c_1 , b_1]$, il y a une infinité de termes u_n . Soit alors I_2 un de ces segments ayant une infinité de termes u_n ...
On crée ainsi une suite dichotomique de segments emboîtés $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $I_n = [a_n, b_n]$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes. On note l la limite commune.
Soit alors $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(n)$ est le plus petit indice $p > \varphi(n-1)$ tel que $u_p\in I_n$
φ est bien définie car dans chaque I_n on a une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
De plus, par construction, φ est strictement croissante. Enfin, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in I_n$.
Aussi, d'après le théorème des gendarmes, puisque $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
C'est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et qui est convergente.

V) Traduction séquentielle de certaines propriétés

Définition : Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est une partie dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

Exemple: On a déjà vu que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. C'est aussi le cas de $\mathbb{D}$.

Proposition : Caratérisation séquentielle de la densité Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors :
A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\forall x \in\mathbb{R}, \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x

Dem: $\Rightarrow$ On suppose A dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, A rencontre $]x - 10^{-n}, x + 10^{-n}[$. Soit u_n un élément de A dans cet intervalle. Alors, d'après le th des gendarmes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.
$\Leftarrow$ On suppose que tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A. Soit un intervalle ouvert non vide I. Soit a, b et c trois éléments de I distincts tels que $a < b < c$ avec b milieu de $[a,c] \subset I$. On considère $\varepsilon = b - a > 0$. Comme il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers b, il existe un rang p à partir duquel $|u_n - b| \leq \varepsilon$. En particulier $a \leq u_p \leq c$ et donc u_p est un élément de A dans I.

Proposition : Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Alors : $\exists(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers sup(A)

Dem: On applique successivement la caractèrisation de la borne sup avec $\varepsilon = 10^{-n}$ et on crée ainsi une suite de A convergeant vers sup(A) .

Proposition : Soit A une partie ni vide ni majorée de $\mathbb{R}$. Alors : $\exists(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}$ qui diverge vers $+\infty$

VI) Suites complexes

Convergence et divergence

Définition dans S(ℂ): Soit U = $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in$ S(ℂ). On dit que U est **convergente** $\Leftrightarrow$ $\exists\, l\in\mathbb{C} \mid \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \left| u_n - l \right| \leq \varepsilon$.

Théorème: Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente alors le nombre l rentrant dans la définition est unique.

Définition: Cet unique l est appelé **limite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et on note : $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Dem: Comme pour ℝ

Remarque: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \Leftrightarrow \forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0\in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$

Définition: Soit U $\in$ S(ℂ). On dit que U est **divergente** sssi elle n'est pas convergente.

Théorème: Toute suite convergente est bornée.

Dem: Même que pour ℝ

Caractérisation par les parties réelles et imaginaires

Théorème: Soit U$\in$ S(ℂ). Soit R = (R_n) et I = (I_n) les suites des parties réelles et imaginaires des u_n : $R_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et $I_n = \mathrm{Im}(u_n)$. R et I sont deux suites réelles.
Alors : U est convergente $\Leftrightarrow$ R et I sont convergentes.
De plus, si tel est le cas, les parties réelle et imaginaire de la limite de U sont les limites de R et I.

Dem: $\Rightarrow$ Si U converge. Soit l sa limite, $l' = \mathrm{Re}(l)$ et $l'' = \mathrm{Im}(l)$.

Soit $\varepsilon>0$. $\exists n_0\in\mathbb{N} | \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$. Or $|u_n - l| \geq |\mathrm{Re}(u_n - l)| = |R_n - l'|$ et de même $|I_n - l''| \leq |u_n - l|$.

Aussi : $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow |R_n - l'| \leq \varepsilon$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow |I_n - l''| \leq \varepsilon$

Ainsi : $\forall\ \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\ n_0 \in\mathbb{N} \mid n\geq n_0 \Rightarrow |R_n - l'| \leq \varepsilon$: R converge vers l'

$\forall\ \varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\ n_0 \in\mathbb{N} \mid n\geq n_0 \Rightarrow |I_n - l''| \leq \varepsilon$: I converge vers l''.

$\Leftarrow$ Si R converge vers l' et I converge vers l''. Soit $l = l' + i\, l''$

On a : $\forall n \in\mathbb{N},\ |u_n - l| \leq |R_n - l'| + |I_n - l''|$ (inégalité triangulaire appliquée à $R_n - l'$ et $i(I_n - l'')$)

Fixons $\varepsilon>0$. $\exists n_1\in\mathbb{N}|\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_1 \Rightarrow |R_n - l'| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ et $\exists n_2\in\mathbb{N}|\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_1 \Rightarrow |I_n - l''| \leq \varepsilon'$

Ainsi, si on pose $n_0 = \sup(n_1,n_2)$, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$. CQFD

Propriété: Soit (u_n) une suite de réels ou de complexes convergeant vers l . Alors la suite des modules $(|u_n|)$ converge vers $|l|$

Dem: Comme pour ℝ

Opérations algébriques sur les limites

Les résultats concernant les opérations algèbriques se prolongent

Théorème de Bolzano - Weierstrass

Théorème de Bolzano - Weierstrass: De toute suite bornée de complexes on peut extraire une sous-suite convergente.

Dem: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Soit φ strictement croissante telle que $(\mathrm{Re}(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$.
Mais alors $(\mathrm{Im}(u_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée dont on peut extraire une suite convergente $(\mathrm{Im}(u_{\varphi\circ\theta(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$
Ainsi $(u_{\varphi\circ\theta(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge

VII) Suites particulières

1) Suite arithmétique

Définition Soit U = $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in$ S(K). On dit que U est **une suite arithmétique** $\Leftrightarrow$ $\exists\, r\in K \mid \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = r$.

Propriété : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = u_0 + n\, r$.

Dem: On peut procéder soit par récurrence soit en introduisant la somme téléscopique $\sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1}-u_k\right)$

2) Suite géométrique

Définition Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(K)$. On dit que U est **une suite géométrique** $\Leftrightarrow$ $\exists\, q\in K \mid \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n$.

Propriété : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = q^n \times u_0$

Dem: On peut procéder par récurrence. On peut aussi utiliser un produit téléscopique si les termes sont non nuls.

3) Suite arithmético-géométrique

Définition Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(K)$. On dit que U est **une suite arithmético-géométrique** $\Leftrightarrow$ $\exists (r, q)\in K^2 \mid \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n + r$.

Remarque: Pour obtenir une expression du terme général d'une suite arithmético-géométrique définie par la relation $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n + r$, on dispose de deux méthodes :

- soit on cherche une constante α telle que la suite $(u_n + \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique de raison q
- soit on utilise la somme téléscopique $\sum_{k=0}^{n-1}\left(v_{k+1}-v_k\right)$ avec $v_n = q^{-n} \times u_n$

4) Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants

Ce sont les suites $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(K)$, pour lesquelles il existe 2 constantes a et b telles que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$ (R)

Propriété : Soit (C) : $X^2 = a X + b$ l'équation caractéristique de la relation (R).

1) **Si (C) possède deux solutions distinctes r et s. Alors il existe deux constantes α et β telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \alpha \times r^n + \beta \times s^n$**
2) **Si (C) possède une solution double r. Alors il existe deux constantes α et β telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = (\alpha + \beta n) \times r^n$**

Dem: On peut détermine les constantes α et β pour qu'elles vérifient la relation pour n = 0 et n = 1. Puis on montre l'égalité par récurrence.

5) Suite récurrente

Ce sont les suites $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(K)$, pour lesquelles il existe une fonction f et une constante a telles que : $u_0 = a$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$

Propriété : Soit la suite récurrente définies par $u_0 = a$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et que f est continue en l, alors $f(l) = l$

Dem: Sera vue dans le chapitre "Fonctions continues"