DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 5

PROBLEME : QUELQUES RESULTATS SUR LA SUITE DE FIBONACCI

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

1) **D**éterminer la liste des 10 premiers nombres de Fibonacci (de F_1 à F_{10})
Ecrire un programme Maple permettant de calculer le nième terme de la suite de Fibonacci.
Calculer F_n pour n égal à $100 - j - m$ où j est le jour de votre date de naissance et m le mois de naissance.

2) **M**ontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq 6 \Rightarrow F_n > n$. **Q**u'en déduit-on pour la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3) **M**ontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow F_n < F_{n+1} \leq 2 F_n$

4) **M**ontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$

5) **M**ontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$

6) **M**ontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{2n-1} F_k F_{k+1} = F_{2n}^2$

7) **M**ontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ et $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$

8) **M**ontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n-k}^{k} = F_{2n+1}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1-k}^{k} = F_{2n+2}$

9) **M**ontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $F_{n-1} + \alpha F_n = \alpha^n$ avec $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

10) **M**ontrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ avec $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (Formule de Binet)

CORRIGE

1) On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

On a : $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$ etc. ....

Programme Python

```
fibo_1 , fibo_2 = 0,1
for k in range(n-1) :
        inter = fibo_2
        fibo_2 = fibo_2 + fibo_1
        fibo_1 = inter
```

Le résultat voulu (F_n) est dans la variable fibo_2. On trouve par exemple :

$F_{60} = 1548008755920$	$F_{61} = 2504730781961$	$F_{64} = 10610209857723$
$F_{74} = 1304969544928657$	$F_{77} = 5527939700884757$	$F_{78} = 8944394323791464$
$F_{80} = 23416728348467685$	$F_{91} = 4660046610375530309$	$F_{96} = 51680708854858323072$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq 6 \Rightarrow F_n > n$. Qu'en déduit-on pour la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Soit P_n la propriété de récurrence : " $F_n > n$ et $F_{n+1} > n + 1$ "

- P_6 vraie ? On a $F_6 = 8 > 6$ et $F_7 = 13 > 7$ donc **P_6 est vraie**
- Si P_n est vraie (avec $n \geq 6$), P_{n+1} est-elle également vraie ? On a $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} > n + (n + 1)$ car P_n est vraie. Ainsi, puisque $n > 2$ (car $n \geq 6$), on a $F_{n+2} > n + 2$. Mais comme on a toujours $F_{n+1} > n + 1$, on en déduit que **P_{n+1} est vraie**
- Ainsi on a montré que P_6 est vraie et que, si P_n vraie avec $n\geq 6$, P_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6 \Rightarrow P_n$ vraie i.e. **$\forall n\in \mathbb{N}$, $n \geq 6 \Rightarrow F_n > n$**
- La suite $(F_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est donc minorée, à partir d'un certain rang, par une suite divergeant vers $+\infty$, donc par le théorème de divergence par minoration, on a **$(F_n)_{n\in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$**

3) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow F_n < F_{n+1} \leq 2 F_n$

Soit P_n la propriété de récurrence : " $F_n < F_{n+1} \leq 2 F_n$ et $F_{n+1} < F_{n+2} \leq 2 F_{n+1}$ "

- P_2 vraie ? On a $F_2 = 1 < 2 = F_3 \leq 2 \times 1 = 2 F_2$ et $F_3 = 2 < 3 = F_4 \leq 2 \times 2 = 2 F_3$ donc **P_2 est vraie**
- Si P_n est vraie (avec $n \geq 2$), P_{n+1} est-elle également vraie ? On a $F_n < F_{n+1} \leq 2 F_n$ et $F_{n+1} < F_{n+2} \leq 2 F_{n+1}$ Ainsi, en ajoutant ces deux inégalités, on a : $(F_n + F_{n+1}) < (F_{n+1} + F_{n+2}) \leq 2 (F_n + F_{n+1})$ i.e. $F_{n+2} < F_{n+3} \leq 2 F_{n+2}$
  Comme, de plus, on a encore : $F_{n+1} < F_{n+2} \leq 2 F_{n+1}$ on en déduit que **P_{n+1} est vraie**
- Ainsi on a montré que P_2 est vraie et que, si P_n vraie avec $n\geq 2$, P_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow P_n$ vraie i.e. **$\forall n\in \mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow F_n < F_{n+1} \leq 2 F_n$**

4) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$

Soit P_n la propriété de récurrence : " $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ "

- P_1 vraie ? On a $\sum_{k=1}^{1} F_k = F_1 = 1$ et $F_3 - 1 = 1$ donc on a bien : $\sum_{k=1}^{1} F_k = F_3 - 1$ i.e. **P_1 est vraie**
- Si P_n est vraie (avec $n \geq 1$), P_{n+1} est-elle également vraie ? On a : $\sum_{k=1}^{n+1} F_k = \sum_{k=1}^{n} F_k + F_{n+1} = F_{n+1} + F_{n+2} - 1$ car P_n est vraie.

  Ainsi :
  $\sum_{k=1}^{n+1} F_k = F_{n+3} - 1$. On en déduit que **P_{n+1} est vraie**
- Ainsi on a montré que P_1 est vraie et que, si P_n vraie avec $n\geq 1$, P_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1 \Rightarrow P_n$ vraie i.e. **$\forall n\in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$**

5) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$

Soit P_n la propriété de récurrence : " $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$ "

- P_1 vraie ? On a $\sum_{k=1}^{1} F_k^2 = F_1^2 = 1$ et $F_1 F_2 = 1$ donc on a bien : $\sum_{k=1}^{1} F_k^2 = F_1 F_2$ i.e. **P_1 est vraie**

- Si P_n est vraie (avec $n \geq 1$), P_{n+1} est-elle également vraie ? On a : $\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=1}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2 = F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2$ car P_n est vraie.

  Ainsi : $\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} F_{n+2}$. On en déduit que **P_{n+1} est vraie**

➢ Ainsi on a montré que P_1 est vraie et que, si P_n vraie avec $n \geq 1$, P_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \Rightarrow P_n$ vraie i.e. **$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$**

6) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{2n-1} F_k F_{k+1} = F_{2n}^2$

Soit P_n la propriété de récurrence : " $\sum_{k=1}^{2n-1} F_k F_{k+1} = F_{2n}^2$ "

- P_1 vraie ? On a $\sum_{k=1}^{1} F_k F_{k+1} = F_1 F_2 = 1$ et $F_2^2 = 1$ donc on a bien : $\sum_{k=1}^{1} F_k F_{k+1} = F_2^2$ i.e. **P_1 est vraie**
- Si P_n est vraie (avec $n \geq 1$), P_{n+1} est-elle également vraie ? On a : $\sum_{k=1}^{2n+1} F_k F_{k+1} = \sum_{k=1}^{2n-1} F_k F_{k+1} + F_{2n} F_{2n+1} + F_{2n+1} F_{2n+2}$

  $= F_{2n}^2 + F_{2n} F_{2n+1} + F_{2n+1} F_{2n+2}$ car P_n est vraie.

  D'où $\sum_{k=1}^{2n+1} F_k F_{k+1} = F_{2n}(F_{2n} + F_{2n+1}) + F_{2n+1} F_{2n+2} = F_{2n} F_{2n+2} + F_{2n+1} F_{2n+2} = F_{2n+2}(F_{2n} + F_{2n+1}) = F_{2n+2}^2$

  On en déduit que **P_{n+1} est vraie**

➢ Ainsi on a montré que P_1 est vraie et que, si P_n vraie avec $n \geq 1$, P_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \Rightarrow P_n$ vraie i.e. **$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{2n-1} F_k F_{k+1} = F_{2n}^2$**

7) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ et $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$

Soit P_n la propriété de récurrence : " $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ et $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$ "

- P_1 vraie ? On a : $F_2 = 1$, $F_2^2 - F_0^2 = 1$ donc on a bien : $F_2 = F_2^2 - F_0^2$. De même : $F_3 = 2 = F_2^2 + F_1^2$ d'où **P_1 est vraie**
- Si P_n est vraie (avec $n \geq 1$), P_{n+1} est-elle également vraie ? On a :
  - $F_{2n+2} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2 + F_n^2$ car P_n est vraie

    Or $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = (F_{n+1} + F_{n-1})(F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ D'où : $F_{2n+2} = F_{n+1}^2 + F_n^2 + F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$

    D'où : $F_{2n+2} = F_{n+1}^2 + F_n(F_{n+1} + F_n + F_{n-1}) = F_{n+1}^2 + 2F_n F_{n+1} = (F_{n+1} + F_n)^2 - F_n^2 = F_{n+2}^2 - F_n^2$
  - $F_{2n+3} = F_{2n+1} + F_{2n+2} = F_{n+1}^2 + F_n^2 + F_{n+2}^2 - F_n^2 = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2$

  On en déduit que **P_{n+1} est vraie**

➢ Ainsi on a montré que P_1 est vraie et que, si P_n vraie avec $n \geq 1$, P_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \Rightarrow P_n$ vraie i.e. **$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$ et $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$**

8) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} C_{2n-k}^k = F_{2n+1}$ et $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1-k}^k = F_{2n+2}$

Soit P_n la propriété de récurrence : " $\sum_{k=0}^{n} C_{2n-k}^k = F_{2n+1}$ et $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1-k}^k = F_{2n+2}$ "

- P_1 vraie ? On a : $F_3 = 2$ et $\sum_{k=0}^{1} C_{2-k}^k = C_2^0 + C_1^1 = 2$. De même : $F_4 = 3 = C_3^0 + C_2^1 = \sum_{k=0}^{1} C_{3-k}^k$ d'où **P_1 est vraie**

◇ <u>Si P_n est vraie (avec $n \geq 1$), P_{n+1} est-elle également vraie ?</u> On a : $\sum_{k=0}^{n} C_{2n-k}^{k} = F_{2n+1}$ et $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1-k}^{k} = F_{2n+2}$ D'où

- $F_{2n+3} = F_{2n+1} + F_{2n+2} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n-k}^{k} + \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1-k}^{k} = C_n^n + C_{2n+1}^0 + \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-k}^{k} + \sum_{k=1}^{n} C_{2n+1-k}^{k}$

$$= C_{n+1}^{n+1} + C_{2n+2}^{0} + \sum_{k=1}^{n} \left(C_{2n+1-k}^{k-1} + C_{2n+1-k}^{k} \right) = C_{n+1}^{n+1} + C_{2n+2}^{0} + \sum_{k=1}^{n} C_{2n+2-k}^{k} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{2n+2-k}^{k}$$

- $F_{2n+4} = F_{2n+2} + F_{2n+3} = C_{2n+2}^{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \left(C_{2n+2-k}^{k-1} + C_{2n+2-k}^{k} \right) = C_{2n+3}^{0} + \sum_{k=1}^{n+1} C_{2n+3-k}^{k} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{2n+3-k}^{k}$

On en déduit que **P_{n+1} est vraie**

➤ Ainsi on a montré que P_1 est vraie et que, si P_n vraie avec $n \geq 1$, P_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \Rightarrow P_n$ vraie i.e. **$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} C_{2n-k}^{k} = F_{2n+1}$ et $\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1-k}^{k} = F_{2n+2}$**

9) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n-1} + \alpha F_n = \alpha^n$ avec $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Soit P_n la propriété de récurrence : " $F_{n-1} + \alpha F_n = \alpha^n$ "

◇ <u>P_1 vraie ?</u> On a : $F_0 + \alpha F_1 = 0 + \alpha = \alpha^1$ i.e. **P_1 est vraie**

◇ <u>Si P_n est vraie (avec $n \geq 1$), P_{n+1} est-elle également vraie ?</u> On a : $F_{n-1} + \alpha F_n = \alpha^n$.

Ainsi : $\alpha^{n+1} = \alpha F_{n-1} + \alpha^2 F_n = \alpha (F_{n+1} - F_n) + \alpha^2 F_n = (\alpha^2 - \alpha) F_n + \alpha F_{n+1} = F_n + \alpha F_{n+1}$ car $\alpha^2 - \alpha = 1$

On en déduit que **P_{n+1} est vraie**

➤ Ainsi on a montré que P_1 est vraie et que, si P_n vraie avec $n \geq 1$, P_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \Rightarrow P_n$ vraie i.e. **$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n-1} + \alpha F_n = \alpha^n$**

10) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ avec $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (Formule de Binet)

Soit P_n la propriété de récurrence : " $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ et $F_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$ "

◇ <u>P_0 vraie ?</u> On a : $F_0 = 0 = \frac{\alpha^0 - \beta^0}{\alpha - \beta}$ et de même : $F_1 = 1 = \frac{\alpha^1 - \beta^1}{\alpha - \beta}$ i.e. **P_0 est vraie**

◇ <u>Si P_n est vraie, P_{n+1} est-elle également vraie ?</u> On a : $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ et $F_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$. On a déja $F_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$

De plus : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} + \alpha^n}{\alpha - \beta} - \frac{\beta^{n+1} + \beta^n}{\alpha - \beta} = (\alpha + 1)\frac{\alpha^n}{\alpha - \beta} - (\beta + 1)\frac{\beta^n}{\alpha - \beta}$

Or α et β sont les racines de l'équation : $X^2 - (\alpha + \beta) X + \alpha\beta = 0$ i.e. ce sont les solutions de l'équation : $X^2 - X - 1 = 0$

Aussi : $\alpha + 1 = \alpha^2$ et $\beta + 1 = \beta^2$. En particulier, on a : $F_{n+2} = \alpha^2 \frac{\alpha^n}{\alpha - \beta} - \beta^2 \frac{\beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta}$

Comme on a toujours $F_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$, on en déduit que **$P_{n+1}$ est vraie**

➤ Ainsi on a montré que P_0 est vraie et que, si P_n vraie, P_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n vraie . En particulier : **$\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$**