Devoir surveillé N° 3 (4 heures)

Ce devoir est constitué d'un problème et de quatre exercices. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. La calculatrice est autorisée. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

Exercice 1 : Équation différentielle du premier ordre

On considère l'équation différentielle : $(E) \quad : \quad (1+x^2)\,y' + (1-x)^2\,y = x^3 + x^2 - 3x + 3$

1. Montrer que, parmi les courbes intégrales, il y a une et une seule droite.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
3. Soit $h \in \mathbb{R}$. On note y_h la solution de (E) vérifiant : $y_h(0) = h$.
   On note (C_h) la courbe représentative de y_h
   (a) Montrer que (C_h) posséde une asymptote qui ne dépend pas du paramètre h.
   (b) Étudier la branche infinie de (C_h) au voisinage de $-\infty$

Exercice 2 : Équations différentielles du second ordre

Résoudre, dans l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, les équations différentielles linéaires du second ordre suivantes et pour chacune d'entre elles, on donnera la solution répondant aux conditions initiales : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

1. $y'' + y' - 6\,y = 25\,e^{2x} + 6\,e^{3x}$
2. $y'' - 4\,y' + 5\,y = e^{2x}\,\cos(x)$

Exercice 3 : Systèmes linéaires

Résoudre les systèmes linéaires suivants, (on discutera du nombre de solution selon les valeurs de m dans le premier cas) :

1. $\begin{cases} x + (m+1)\,y &= m+2 \\ mx + (m+4)\,y &= m^2+4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x+y+z &= 3 \\ 3x-y-2z &= 0 \\ x+y-z &= -2 \\ x+2y+z &= 1 \end{cases}$

Exercice 4 : Sommes simples et sommes doubles

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+2j)$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^3-1} \left\lfloor \sqrt[3]{k} \right\rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entiére du réel x
   (a) Calculer $u_{n+1} - u_n$
   (b) En déduire u_n en fonction de n
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. En utilisant un résultat sur l'interversion du symbole $\sum$ pour une somme indéxée sur un triangle ainsi que la formule du binôme, calculer :

$$\sum_{j=0}^{n} \left[x^j \binom{n}{j} \sum_{k=j}^{n} \binom{n-j}{n-k} \right]$$

Problème : Densité de $\{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor\}$ dans $[0,1]$

1. **Recherche d'un entier n tel que $\sqrt{n}$ ait pour premières décimales : $\cdots, 19\cdots$.**
   On raisonne par analyse-synthèse
   (a) **Analyse**.
   Supposons qu'il existe un entier n tel que : $0,19 \leqslant \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor < 0,20$
   On pose $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ et $I_k = [k^2 + 0,38\,k + 0,0361; k^2 + 0,4\,k + 0,04[$
   Montrer que : $n \in I_k$
   (b) **Synthèse**.
   Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose $I_p = [p^2 + 0,38\,p + 0,0361; p^2 + 0,4\,p + 0,04[$
   i. Calculer le diamètre de I_p i.e. la plus grande distance entre deux éléments de I_p
   ii. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que le diamètre de I_N soit plus grand que 1.
   iii. En déduire qu'il existe au moins un entier q tel que $I_q \bigcap \mathbb{N} \neq \varnothing$
   iv. Soit $n \in I_q \bigcap \mathbb{N}$. Montrer que $\{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor\} \in [0,19; 0,20[$.
   (c) **Exemples**.
   i. Déterminer deux valeurs de $n \in \mathbb{N}$ telles que $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \in [0,19; 0,20[$
   ii. Déterminer une valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ et $\sqrt{n+1} - \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor$ soient tous deux dans $[0,19; 0,20[$.
   iii. Ecrire un programme Python ou un algorithme en français permettant d'obtenir le plus petit entier n tel que $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \in [0,19; 0,20[$

2. **Étude du cas général** Soit $(a,b) \in [0,1]$ avec $a < b$
   (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que le diamètre de $\left[(N+a)^2 ; (N+b)^2\right[$ soit supérieur à 1.
   (b) Montrer que, pour cet entier N, $\left[(N+a)^2 ; (N+b)^2\right[\bigcap \mathbb{N} \neq \varnothing$
   (c) Soit $n \in \left[(N+a)^2 ; (N+b)^2\right[\bigcap \mathbb{N}$. Montrer que : $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \in [a; b[$
   (d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\exists n \in \mathbb{N} \mid \forall i \in [\![0, p-1]\!], \sqrt{n+i} - \lfloor \sqrt{n+i} \rfloor \in [a; b[$
   (e) Ecrire un programme Python ou un algorithme en français permettant d'obtenir le plus petit entier n tel que $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \in [a; b[$
   (f) <u>Question subsidiaire</u> En traduisant le programme précédent sur votre calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \in [0,80; 0,81[$

CORRECTION

Exercice 1 : Équation différentielle (E) : $\left(1+x^2\right)y'+(1-x)^2\,y = x^3+x^2-3x+3$

1. On cherche une solution sous la forme : $y_0 : x \to ax+b$ où a et b sont des réels à déterminer.
   y_0 est dérivable et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, y_0'(x) = a$. Donc :
   y_0 solution de $(E) \iff \forall x \in \mathbb{R}, a(1+x^2) + (ax+b)\times(1-x)^2 = x^3+x^2-3x+3$

   $$\iff \forall x \in \mathbb{R}, ax^3 + a(1+x^2) + (ax+b)\times(1-x)^2 = x^3+x^2-3x+3$$

   $$\iff \begin{cases} a & = 1 \\ b-a & = 1 \\ a-2b & = -3 \\ a+b & = 3 \end{cases} \quad (\text{ par identification}) \quad \iff \begin{cases} a & = 1 \\ b & = 2 \end{cases}$$

   Donc on a une et une seule droite qui est courbe intégrale de cette équation différentielle : il s'agit de $\boxed{\textbf{la droite d'équation } Y = X+2}$.

2. Soit $(H) : (1+x^2)\,y' + (1-x)^2\,y = 0$ l'équation homogène associée à (E).
   Puisque : $\forall x \in \mathbb{R}, -\frac{(x-1)^2}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1} - 1$, une primitive de la fonction $x \longrightarrow -\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ est la fonction $x \longrightarrow \ln\left(1+x^2\right) - x$. Ainsi les solutions de (H) sont les fonctions $\boxed{g_\lambda : x \longrightarrow \lambda\left(1+x^2\right)e^{-x}}$
   Connaissant la structure de l'ensemble des solutions de (E), on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est $\boxed{\textbf{l'ensemble des fonctions } f_\lambda : x \longrightarrow x+2+\lambda\left(1+x^2\right)e^{-x} \textbf{ où } \lambda \in \mathbb{R}}$

3. Parmi les courbes intégrales de (E) celle passant par le point de coordonnées $(0,h)$ est la courbe (C_h) de la fonction $y_h : x \longrightarrow x+2+(h-2)\left(1+x^2\right)e^{-x}$
   (a) On a clairement $\lim\limits_{x\to+\infty} y_h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (y_h(x)-x-2) = 0$ donc
   $\boxed{\textbf{la droite d'équation } Y = X+2 \textbf{ est asymptote à la courbe } (C_h)}$
   (b) En $-\infty$, (C_h) possède $\boxed{\textbf{une asymptote si } h=2 \textbf{ (la droite d'équation } Y=X+2\textbf{)}}$, ou $\boxed{\textbf{une branche parabolique d'axe } (Oy) \textbf{ si } h \neq 2}$.

Exercice 2 : Équations différentielles du second ordre

1. $(E_1) \quad : \quad y'' + y' - 6\,y = 25\,e^{2x} + 6\,e^{3x}$
   Les solutions de (E_1) sont les fonctions de la forme $\boxed{x \longrightarrow 5\,x\,e^{2x} + e^{3x} + A\,e^{2x} + B\,e^{-3x}}$
   Parmi celles-ci, celle qui vérifie le problème de Cauchy est $\boxed{x \longrightarrow \left(5\,x - \frac{11}{5}\right)e^{2x} + e^{3x} + \frac{6}{5}\,e^{-3x}}$

2. $(E_2) \quad : \quad y'' - 4\,y' + 5\,y = e^{2x}\,\cos(x)$
   Les solutions de (E_2) sont les fonctions de la forme $\boxed{x \longrightarrow \frac{1}{2}\,x\,\sin(x)\,e^{2x} + A\,\sin(x)\,e^{2x} + B\,\cos(x)\,e^{2x}}$
   Parmi celles-ci, celle qui vérifie le problème de Cauchy est $\boxed{x \longrightarrow \frac{1}{2}\,x\,\sin(x)\,e^{2x}}$

Exercice 3 : Systèmes linéaires

1. $(S) \quad \begin{cases} x+(m+1)\,y & = m+2 \\ mx+(m+4)\,y & = m^2+4 \end{cases} \iff \begin{cases} x+(m+1)\,y & = m+2 \\ (4-m^2)\,y & = 4-2m \end{cases}$

   ☞ <u>Si $m=2$</u> Alors $(S) \iff \begin{cases} x+3y & = 4 \\ 0y & = 0 \end{cases} \iff x+3y=4$. Donc l'ensemble des solutions de (S) est $\boxed{\textbf{la droite d'équation } x+3y=4}$

   ☞ <u>Si $m=-2$</u> Alors $(S) \iff \begin{cases} x-y & = 0 \\ 0y & = 8 \end{cases}$. Donc $\boxed{(S) \textbf{ n'a pas de solution}}$

☞ Si $m^2 \neq 4$ Alors $(S) \iff \begin{cases} x+(m+1)\,y & = m+2 \\ (4-m^2)\,y & = 4-2m \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \frac{m^2+2m+2}{m+2} \\ y & = \frac{2}{m+2} \end{cases}$.

Donc $\boxed{(S) \text{ a une et une seule solution : le couple } \left(\frac{m^2+2m+2}{m+2}, \frac{2}{m+2}\right)}$

2. $$(S) \begin{cases} 2x+y+z & = 3 \\ 3x-y-2z & = 0 \\ x+y-z & = -2 \\ x+2y+z & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-z & = -2 \\ y+2z & = 3 \\ -y+3z & = 7 \\ -4y+z & = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-z & = -2 \\ y+2z & = 3 \\ 5z & = 10 \\ 9z & = 18 \end{cases}$$

D'où $(S) \iff \begin{cases} x+y-z & = -2 \\ y+2z & = 3 \\ z & = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 1 \\ y & = -1 \\ z & = 2 \end{cases}$

Donc $\boxed{(S) \text{ a une et une seule solution : le triplet } (1,-1,2)}$

Exercice 4 : Sommes simples et sommes doubles

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+2j) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(i+2j)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2}+2j^2\right) = \frac{5}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j$

   Donc $S_1 = \frac{5}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+2j) = \frac{n(n+1)(5n+4)}{6}}$

2. $S_2 = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(i^2+2\,i\,j+j^2)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\,\frac{n(n+1)}{2}j+n\,j^2\right)$

   Donc $S_2 = n\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + n\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}}$

3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^3-1}\left\lfloor \sqrt[3]{k}\right\rfloor$

   (a) $u_{n+1}-u_n = \displaystyle\sum_{k=n^3}^{(n+1)^3-1}\left\lfloor \sqrt[3]{k}\right\rfloor = \sum_{k=n^3}^{(n+1)^3-1} n$ donc $\boxed{u_{n+1}-u_n = 3n^3+3n^2+n}$

   (b) $u_n = u_1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}(u_{j+1}-u_j) = \sum_{j=1}^{n-1}(3j^3+3j^2+j)$ car $u_1 = 0$. D'où :

   $u_n = 3\,\frac{n^2(n-1)^2}{4} + 3\,\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}$ soit $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n^3-1}\left\lfloor \sqrt[3]{k}\right\rfloor = \frac{n^2(n-1)(3n+1)}{4}}$

4. $S_3 = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\left[x^j\binom{n}{j}\sum_{k=j}^{n}\binom{n-j}{n-k}\right] = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\left[x^j\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}\right]$

   Or $\displaystyle\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k} = \frac{n!}{j!(n-j)!}\times\frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{k!}{(k-j)!j!} = \binom{n}{k}\binom{k}{j}$ Ainsi :

   $S_3 = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\left[x^j\binom{n}{k}\binom{k}{j}\right] = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\left[x^j\binom{n}{k}\binom{k}{j}\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k$

   Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\left[x^j\binom{n}{j}\sum_{k=j}^{n}\binom{n-j}{n-k}\right] = (2+x)^n}$

Problème : Densité de $\{\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$ dans $[0,1]$

1. **Recherche d'un entier n tel que $\sqrt{n}$ ait pour premières décimales : $\cdots, 19\cdots$.**
   On raisonne par analyse-synthèse

   (a) **Analyse**.
   Supposons qu'il existe un entier n tel que : $0,19 \leqslant \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor < 0,20$
   On pose $k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ et $I_k = [k^2 + 0,38\,k + 0,0361; k^2 + 0,4\,k + 0,04[$
   On a : $0,19 + k \leqslant \sqrt{n} < 0,20 + k$ donc $k^2 + 0,38\,k + 0,0361 \leqslant n < k^2 + 0,4\,k + 0,04$ i.e $\boxed{n \in I_k}$

   (b) **Synthèse**.
   Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose $I_p = [p^2 + 0,38\,p + 0,0361; p^2 + 0,4\,p + 0,04[$

   i. Le diamètre de I_p est $\boxed{0.02\,p + 0,0039}$

   ii. Lorsque p tend vers $+\infty$, ce diamètre tend vers $+\infty$. Ainsi **il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que le diamètre de I_N soit plus grand que 1**. Il suffit de prendre $\boxed{N = 50}$

   iii. Soit $q = 50$. Puisque le diamètre de I_q est strictement supérieur à 1, l'intervalle I_q contient au moins un entier : $\boxed{I_q \bigcap \mathbb{N} \neq \varnothing}$

   iv. Soit $n \in I_q \bigcap \mathbb{N}$. On a n entier et $q^2 + 0,38\,q + 0,0361 \leqslant n < q^2 + 0,4\,q + 0,04$ d'où $q \leqslant q + 0,19 \leqslant \sqrt{n} < q + 0,2 < q + 1$ avec q entier. Ainsi la partie entière de $\sqrt{n}$ est q et on trouve bien : $0,19 \leqslant \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor < 0,20$ i.e. $\boxed{\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \in [0,19; 0,20[}$.

   (c) **Exemples**.

   i. Avec $q \geqslant 50$, en prenant un entier dans I_q, cet entier vérifie l'encadrement voulu. Pour $q = 50$, $I_q = [2519,0361; 2520,04[$ donc
   si on prend $\boxed{n = 2520}$, on a bien $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \in [0,19; 0,20[$
   Pour $q = 51$, $I_q = [2620,4161; 2621,44[$ donc
   si on prend $\boxed{n = 2621}$, on a bien $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \in [0,19; 0,20[$

   ii. Pour avoir deux entiers consécutifs vérifiant l'encadrement, il suffit de trouver deux entiers consécutifs dans un intervalle I_q. On sera assuré d'une telle existence dès que le diamètre de I_q est strictement supérieur à 2. Cela est le cas pour $q = 100$ par exemple. Comme $I_{100} = [10038,0361; 10040,04[$, **les deux entiers 10039 et 10040** sont bien consécutifs et vérifient $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \in [0,19; 0,20[$

   iii. Programme Python cherchant le plus petit entier n tel que $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \in [0,19; 0,20[$

```
>>> from math import *
>>> def partiefrac1():
>>>         n, p = 1, 0
>>>         while p < 0.19 or p >=0.2 :
>>>                 n = n + 1
>>>                 p = sqrt(n) - floor(sqrt(n))
>>>         return (n)
```

   On trouve $\boxed{n = 27}$

2. **Étude du cas général** Soit $(a,b) \in [0,1]$ avec $a < b$

   (a) Le diamètre de $I_N = \left[(N+a)^2 ; (N+b)^2\right[$ est $\delta = (b-a)(2N + a + b)$.
   Donc en prenant, par exemple, $N = \left\lfloor \frac{1}{2(b-a)} \right\rfloor + 1$, on aura bien que
   le diamètre de $\left[(N+a)^2 ; (N+b)^2\right[$ est supérieur à 1.

(b) Pour une telle valeur de N, le diamètre de I_N étant strictement supérieur à 1, il existe au moins un entier relatif dans cet intervalle I_N. Or la borne inférieure de I_N est positive donc l'entier trouvé l'est aussi : $\boxed{\left[(N+a)^2\,;(N+b)^2\right[\bigcap\mathbb{N}\neq\varnothing}$

(c) Soit $n\in\left[(N+a)^2\,;(N+b)^2\right[\bigcap\mathbb{N}$. On a : $N\leqslant N+a\leqslant\sqrt{n}<N+b\leqslant N+1$ avec N entier. Donc N est la partie entière de $\sqrt{n}$ et donc : $\boxed{\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor\in[a;b[}$

(d) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On choisit cette fois N tel que le le diamètre de I_N soit strictement supérieur à p. Il existe alors p entiers naturels consécutifs dans I_N. On note n le plus petit d'entre eux. Puisque n, $n+1$, …, $n+p-1$ sont dans $\left[(N+a)^2\,;(N+b)^2\right[\bigcap\mathbb{N}$, le calcul de la question précédente permet d'affirmer que :
$\boxed{\forall i\in[\![0,p-1]\!]\,,\sqrt{n+i}-\lfloor\sqrt{n+i}\rfloor\in[a;b[}$

(e) Programme Python cherchant le plus petit entier n tel que $\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor\in[a;b[$

```
>>> from math import *
>>> def partiefrac(a,b):
>>>         n, p = 1, 0
>>>         while p < a or p >=b :
>>>                 n = n + 1
>>>                 p = sqrt(n) - floor(sqrt(n))
>>>         return (n)
```

(f) Question subsidiaire En appelant la fonction précédente :

```
>>> partiefrac(0.8, 0.81)
```

On obtient que $\boxed{n=164\ \textbf{est le plus petit entier}\ n\ \textbf{tel que}\ \sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor\in[0,80;0,81[}$