

MPSI 14-15 Feuille n° 10 : Ensembles Du 21/11/14 au 27/11/14

Exercice 1. Soient f une fonction de \mathbb{R} vers \mathbb{R} et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Ecrire symboliquement les assertions suivantes : **a)** f est bornée **b)** f est constante **c)** f est croissante
d) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée **e)** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante **f)** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas décroissante

Exercice 2. Soit E un ensemble. Si $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\mathbb{1}_A$ la fonction caractéristique de A . Montrer :
a) $A \subset B \implies \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$ **b)** $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ **c)** $\mathbb{1}_{E \setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A$ **d)** $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
e) $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A (1 - \mathbb{1}_B)$ **f)** $\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$ avec $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Exercice 3. Sur $E = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, on a la relation d'ordre : "inclusion". Est-ce une relation d'ordre totale ? Déterminer des parties de E dont $\{1\}$ soit un minorant, $\{1\}$ soit le plus petit élément, $\{1, 2, e\}$ soit une borne supérieure sans être le plus grand élément.

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F . On définit sur E la relation \mathcal{R} par : $\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E
2. Déterminer les classes d'équivalence lorsque $f = \sin$, $f = \exp$ et $f : x \mapsto x^2$
3. Montrer que : f est injective \iff les classes d'équivalence de \mathcal{R} sont des singletons.

Exercice 5. Soient E un ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$ et A_0, A_1, \dots, A_n des parties de E telles que : $\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = E$. Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$. Montrer que (B_1, \dots, B_n) est une partition de E

Exercice 6. Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F .

1. Montrer que : $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(F))^2, f^{-1}(A \Delta B) = f^{-1}(A) \Delta f^{-1}(B)$
2. Montrer que : f injective $\iff \forall (C, D) \in (\mathcal{P}(E))^2, f(C \Delta D) = f(C) \Delta f(D)$

Exercice 7. Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F . Montrer que : $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$

Exercice 8. Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre \preccurlyeq . Pour $x \in E$, on pose :

$$\phi(x) = \{t \in E \mid t \preccurlyeq x\}$$

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in E^2, x \preccurlyeq y \iff \phi(x) \subset \phi(y)$
2. Montrer que ϕ est une injection de E vers $\mathcal{P}(E)$. Est-ce une surjection ?
3. On considère Φ une injection de E vers $\mathcal{P}(E)$. On définit alors sur E la relation \mathcal{R} par : $\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \iff \Phi(x) \subset \Phi(y)$. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre sur E .

Exercice 9. Soient A, B et C trois parties d'une même ensemble E . Démontrer que : $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = (A \setminus C) \cup (B \setminus A) \cup (C \setminus B) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$

Exercice 10. Déterminer $f(\mathbb{R}_+^*), f(\mathbb{R}^-), f(\{-1\}), f^{-1}(\mathbb{R}_+^*), f^{-1}(\mathbb{R}^-), f^{-1}(\{-1\})$ pour les fonctions définies par : $f(x) = e^x, f(x) = \ln(x)$ et $f(x) = \cos(x)$

Exercice 11. Comparer les deux ensembles : $f(A \cap f^{-1}(B))$ et $f(A) \cap B$

Exercice 12. Ecrire la table de vérité donnant $D1, D2, D3$ en fonction de A, B et C dans le circuit logique suivant :

