

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 5

Problème : Formule d'inversion de Pascal

On considère deux suites de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$ où

les $\binom{n}{k}$ désignent les coefficients binomiaux.

Le but du problème est d'exprimer, pour tout n , b_n en fonction des a_k

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : k \leq p \leq n \implies$

$$\binom{n+1}{p} \binom{p}{k} = \binom{n+1}{k} \binom{n+1-k}{p-k}$$

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N} : k \leq n \implies$

$$\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n+1-k}{j} = (-1)^{n-k}$$

3. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, b_{n+1} en fonction de a_{n+1} et des $(b_k)_{0 \leq k \leq n}$

4. On suppose que, pour un certain $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq m \implies$$

$$b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$$

Calculer alors b_{m+1} en fonction des $(a_k)_{0 \leq k \leq m+1}$

5. Montrer alors la formule d'inversion de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k$$

6. En déduire une expression de X^n en fonction des $\left((1+X)^k\right)_{0 \leq k \leq n}$