PROBLEME : Formule d'inversion de Pascal CORRIGE

On considère deux suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, b_k$ où les C_n^k désignent les coefficients binomiaux.

Le but de l'exercice est d'exprimer, pour tout n, b_n en fonction des a_k.

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall p\in\mathbb{N},\ \forall k\in\mathbb{N} :\ k \le p \le n \Rightarrow C_{n+1}^{p} C_{p}^{k} = C_{n+1}^{k} C_{n+1-k}^{p-k}$

Soit $(n,p,k)\in\mathbb{N}^3$ avec $k \le p \le n$. On a : $C_{n+1}^{p} C_{p}^{k} = \dfrac{(n+1)!}{p!\,(n+1-p)!}\,\dfrac{p!}{k!\,(p-k)!} = \dfrac{(n+1)!}{k!\,(p-k)!\,(n+1-p)!}$ et

$C_{n+1}^{k} C_{n+1-k}^{p-k} = \dfrac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}\,\dfrac{(n+1-k)!}{(n+1-p)!\,(p-k)!} = \dfrac{(n+1)!}{k!\,(p-k)!\,(n+1-p)!}$ Aussi $\boldsymbol{C_{n+1}^{p} C_{p}^{k} = C_{n+1}^{k} C_{n+1-k}^{p-k}}$

2) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\in\mathbb{N} :\ k \le n \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C_{n+1-k}^{i} = (-1)^{n-k}$

Soit $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ avec $k \le n$. On a : $0 = (1 + (-1))^{n+1-k} = \sum_{i=0}^{n+1-k} (-1)^i C_{n+1-k}^{i}$.

D'où $\boldsymbol{\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C_{n+1-k}^{i} = \sum_{i=0}^{n+1-k} (-1)^i C_{n+1-k}^{i} - (-1)^{n+1-k} = (-1)^{n-k}}$

3) Exprimer, pour $n\in\mathbb{N}$, b_{n+1} en fonction de a_{n+1} et des $(b_k)_{0\le k\le n}$

On a : $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^{k}\, b_k = b_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k}\, b_k$ D'où : $\boldsymbol{b_{n+1} = a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k}\, b_k}$

4) On suppose que pour un certain $m\in\mathbb{N}$, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0 \le n \le m \Rightarrow b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k\, a_k$ Calculer alors b_{m+1} en fonction des $(a_k)_{0\le k\le m+1}$

$$b_{m+1} = a_{m+1} - \sum_{p=0}^{m} C_{m+1}^{p}\, b_p = a_{m+1} - \sum_{p=0}^{m} C_{m+1}^{p} \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k\, a_k = a_{m+1} - \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{p=k}^{m} (-1)^{p-k} C_{m+1}^{p} C_p^k \right) a_k$$ Donc d'après 1),

$$b_{m+1} = a_{m+1} - \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{p=k}^{m} (-1)^{p-k} C_{m+1}^{k} C_{m+1-k}^{p-k} \right) a_k = a_{m+1} - \sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^{k} \left(\sum_{p=k}^{m} (-1)^{p-k} C_{m+1-k}^{p-k} \right) a_k = a_{m+1} - \sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^{k} \left(\sum_{j=0}^{m-k} (-1)^{j} C_{m+1-k}^{j} \right) a_k.$$

Mais, d'après2), $\sum_{j=0}^{m-k} (-1)^j C_{m+1-k}^{j} = (-1)^{m-k}$, donc $\boldsymbol{b_{m+1} = a_{m+1} - \sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^{k} (-1)^{m-k} a_k = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^{k} (-1)^{m+1-k} a_k}$

5) Montrer alors la formule d'inversion de Pascal : $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k\, a_k$

La relation demandée est vraie pour n = 0 (car elle affirme $b_0 = a_0$ ce qui est vrai d'après $a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, b_k$ avec n = 0)

De plus, d'après la question 4), la propriété est "fortement" héréditaire.

Aussi par théorème de récurrence forte : $\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N},\ b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k\, a_k}$

6) En déduire une expression de X^n en fonction des $((1+X)^k)_{0\le k\le n}$

On a : $\forall n\in\mathbb{N},\ (1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k X^k$. D'où en utilisant la formule d'inversion de Pascal que l'on vient de montrer à la question 5), on a : $\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N},\ X^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k (1+X)^k}$