Devoir en temps libre n° 6

Problème : Etude des suites homographiques

Partie I Etude d'une suite homographique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}, f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec a, b, c et d réels tels que : $c\,(ad - bc) \neq 0$.

1. Montrer que l'équation : $f(x) = x$ admet soit 1 ou 2 solutions dans $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ (appelés points fixes de f) soit aucune solution réelle.
   On considère dorénavant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1})f(u_n)$.
   On suppose pour le moment que la suite existe effectivement : on étudiera plus tard les conditions d'existence de la suite en fonction de u_0.
2. Montrer que si f n'a pas de points fixes alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
3. On suppose que f admet au moins un point fixe α. Montrer que, s'il existe un entier p tel que $u_p = \alpha$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, puis que, si $p > 0$, on a également $u_{p-1} = \alpha$ et, enfin, qu'en fait la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
4. On suppose que f admet deux points fixes distincts α et β, et que $u_0 \neq \alpha$. On peut alors considérer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}$
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}$
   (b) Exprimer alors v_n en fonction de n et de u_0 puis u_n en fonction de n et u_0.
   (c) Cette dernière expression étant valable tant que u_n est défini, trouver une condition sur u_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie. On trouvera une condition du type : $u_0 \notin E$ où E est l'ensemble des termes d'une certaine suite.
5. On suppose que f admet un seul point fixe α et que $u_0 \neq \alpha$. On peut alors considérer la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n-\alpha}$
   (a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.
   (b) Exprimer alors v_n en fonction de n et de u_0 puis u_n en fonction de n et u_0.
   (c) Cette dernière expression étant valable tant que u_n est défini, trouver une condition sur u_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie. On trouvera une condition du type : $u_0 \notin E$ où E est l'ensemble des termes d'une certaine suite.

Partie II Etude de deux exemples

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n+2}{u_n+5}$
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$
   (b) Montrer que l'équation : $\frac{4x+2}{x+5} = x$ possède deux solutions α et β avec $\alpha < 0$ et $\beta > 0$.
   (c) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}$. Exprimer v_n en fonction de n.
   (d) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 4$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{7u_n-12}{3u_n-5}$
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 2$
   (b) Montrer que l'équation : $\frac{7x-12}{3x-5} = x$ possède une et une seule solution réelle α.
   (c) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_n-\alpha}$. Exprimer v_n en fonction de n.
   (d) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.