DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 6

CORRECTION : Etude des suites homographiques

Partie I : Etude générale d'une suite homographique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ par : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$, $f(x)=\frac{a\,x+b}{c\,x+d}$ avec $c\,(ad-bc)\neq 0$

1) Montrer que l'équation : $f(x)=x$ admet soit 1 ou 2 solutions (appelés points fixes de f) dans $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ soit aucune solution réelle.

Pour $x\neq -\frac{d}{c}$, $f(x)=x \Leftrightarrow c\,x^2+(d-a)\,x-b=0$. Cette équation admet : soit deux racines complexes conjuguées non réelles si $\Delta=(d-a)^2+4\,bc<0$, soit une solution réelle double si $\Delta=0$ et deux solutions réelles distinctes si $\Delta>0$. Puisque $-\frac{d}{c}$ n'est pas solution de l'équation (car $ad-bc$ est non nul), les solutions réelles sont bien dans $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Donc l'équation : $f(x)=x$ admet soit 1 ou 2 solutions (appelés points fixes de f) dans $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ soit aucune solution réelle

On considère dorénavant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$

On suppose pour l'instant que la suite existe effectivement on étudiera plus tard les conditions d'existence de la suite en fonction de u_0.

2) Montrer que si f n'a pas de point fixe alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Sa limite ℓ vérifie : soit $\ell=-\frac{d}{c}$ soit $f(\ell)=\ell$ car f continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Or $f(\ell)=\ell$ est impossible car f n'a pas de point fixe réel.

De plus si $\ell=-\frac{d}{c}$, puisque $|f|$ admet $+\infty$ pour limite en $-\frac{d}{c}$, la suite de terme général $|u_{n+1}|$ divergerait vers $+\infty$ ce qui est incompatible avec la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **Aussi, si f n'a pas de point fixe, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge**

3) On suppose que f admet au moins un point fixe α. Montrer que s'il existe un entier p tel que $u_p=\alpha$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, que, si $p>0$, u_{p-1} est aussi égal à α et qu'en fait la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Si $u_p=\alpha$. Puisque $f(\alpha)=\alpha$, on montre par une récurrence immédiate que $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant p\Rightarrow u_n=\alpha$. **Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.**

Par ailleurs, si $p>0$ et $u_p=\alpha$. Alors : $f(u_{p-1})=\alpha \Leftrightarrow (a-c\alpha)\,u_{p-1}=d\alpha-b$ donc u_{p-1} est solution d'une équation du premier degré (car $a-c\alpha$ est non nul sinon $d\alpha-b$ le serait aussi et on aurait alors $ad-bc=0$), dont α est une solution évidente.

Ainsi $u_{p-1}=\alpha$. Par une récurrence immédiate (mais finie) on montre que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $p\geqslant n\geqslant 0\Rightarrow u_{p-n}=\alpha$

En particulier $u_0=\alpha$ et donc **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire à partir du rang 0 c'est à dire qu'elle est constante**.

4) On suppose que f admet deux points fixes α et β et que $u_0\neq\alpha$. On peut alors étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\frac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car pour tout n, $u_n\neq\alpha$

a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de rapport $\frac{c\,\alpha+d}{c\,\beta+d}$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-\beta}{u_{n+1}-\alpha}$. Or : $u_{n+1}-\beta=\frac{a\,u_n+b}{c\,u_n+d}-\frac{a\,\beta+b}{c\,\beta+d}=\frac{(ad-bc)\,(u_n-\beta)}{(c\,u_n+d)\,(c\,\beta+d)}$ et de même $u_{n+1}-\alpha=\frac{(ad-bc)\,(u_n-\alpha)}{(c\,u_n+d)\,(c\,\alpha+d)}$

Aussi : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=\frac{c\,\alpha+d}{c\,\beta+d}\,v_n$ **La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de rapport $\frac{c\,\alpha+d}{c\,\beta+d}$**

b) Exprimer alors v_n en fonction de n puis u_n en fonction de u_0.

On pose $\mathbf{k}=\frac{c\,\alpha+d}{c\,\beta+d}$. On a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=k^n\,v_0$ et donc, puisque $u_n=\frac{\alpha\,v_n-\beta}{v_n-1}$, on a : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{\alpha\,(u_0-\beta)\,k^n-\beta\,(u_0-\alpha)}{(u_0-\beta)\,k^n-(u_0-\alpha)}$**

c) Cette dernière expression étant valable tant que u_n est définie, trouver une condition sur u_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie. *On trouvera une condition du type : $u_0\notin E$ où E ensemble des termes d'une certaine suite.*

$$u_n=-\frac{d}{c}\Leftrightarrow v_n=\frac{c\,\beta+d}{c\,\alpha+d}\Leftrightarrow v_n=\frac{1}{k}\Leftrightarrow v_0=\frac{1}{k^{n+1}}\Leftrightarrow\frac{u_0-\beta}{u_0-\alpha}=\frac{1}{k^{n+1}}\Leftrightarrow u_0=\frac{\alpha-\beta\,k^{n+1}}{1-k^{n+1}}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie ssi $u_0\notin\left\{\frac{\alpha-\beta\,k^{n+1}}{1-k^{n+1}}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$

5) On suppose que f admet un seul point fixe α et que $u_0\neq\alpha$. On peut alors étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=\frac{1}{u_n-\alpha}$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car pour tout n, $u_n\neq\alpha$

a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique

$\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}-\alpha}$. Or : $u_{n+1}-\alpha=\frac{a\,u_n+b}{c\,u_n+d}-\frac{a\,\alpha+b}{c\,\alpha+d}=\frac{(ad-bc)\,(u_n-\alpha)}{(c\,u_n+d)\,(c\,\alpha+d)}$

De plus puisque $\Delta=0$, on a : $\alpha=\frac{a-d}{2\,c}$ et $b=c\,\alpha^2$. Donc : $c\,\alpha+d=\frac{a+d}{2}$ et $ad-bc=\frac{(a+d)^2}{4}=(c\,\alpha+d)^2$ Ainsi :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-v_n=\frac{(c\,u_n+d)\,(c\,\alpha+d)}{(ad-bc)\,(u_n-\alpha)}-\frac{1}{u_n-\alpha}=\frac{(c\,u_n+d)\,(c\,\alpha+d)-(ad-bc)}{(ad-bc)\,(u_n-\alpha)}=\frac{c\,u_n+d-(c\,\alpha+d)}{(c\,\alpha+d)\,(u_n-\alpha)}=\frac{c}{(c\,\alpha+d)}=\frac{2\,c}{a+d}$ de

Ainsi : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\dfrac{2c}{a+d}$

b) Exprimer alors v_n en fonction de n puis u_n en fonction de u_0.

On a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = v_0 + \dfrac{2cn}{a+d}$ et donc, puisque $u_n = \alpha + \dfrac{1}{v_n}$, on a : $\mathbf{u_n = \alpha + \dfrac{(a+d)(u_0-\alpha)}{a+d+2c(u_0-\alpha)n}}$,

c) Cette dernière expression étant valable tant que u_n est définie, trouver une condition sur u_0 pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie. *On trouvera une condition du type : $u_0 \notin E$ où E ensemble des termes d'une certaine suite.*

$u_n = -\dfrac{d}{c} \Leftrightarrow v_n = -\dfrac{2c}{a+d} \Leftrightarrow v_0 = -\dfrac{2c}{a+d}(n+1) \Leftrightarrow u_0 = \alpha - \dfrac{a+d}{2c(n+1)}$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie ssi $u_0 \notin \left\{\alpha - \dfrac{a+d}{2c(n+1)} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$

Partie II : Etude de deux exemples

1) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et la relation $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4u_n+2}{u_n+5}$

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n > 0$

Par récurrence immédiate, on a : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n > 0$**

b) Montrer que l'équation $\frac{4x+2}{x+5} = x$ possède deux solutions α et β avec $\alpha < 0$ et $\beta > 0$

$x = \dfrac{4x+2}{x+5} \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow$ **$x = 1$ ou $x = -2$**

c) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in\mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n-\beta}{u_n-\alpha}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est géométrique.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que: $\forall n \in\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+2}$ **est bien définie** car le dénominateur n'est jamais nul.

De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \dfrac{\frac{4u_n+2}{u_n+5}-1}{\frac{4u_n+2}{u_n+5}+2} = \dfrac{3u_n-3}{6u_n+12} = \dfrac{1}{2}v_n$. Aussi la suite **$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$**

d) Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n

On a : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{2^n}v_0 = \dfrac{1}{2^{n+2}}$**. D'où , **$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1+2v_n}{1-v_n} = \dfrac{2^{n+2}+2}{2^{n+2}-1}$**

e) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite

Par comparaison des suites géométriques et des suites constantes, on en déduit que **$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1**

2) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 4$ et la relation $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{7u_n-12}{3u_n-5}$

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n > 2$

On a : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{3(3u_n-5)}$**.

Avec cette dernière expression, on montre par une récurrence immédiate que : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n > 2$**

b) Montrer que l'équation $\frac{7x-12}{3x-5} = x$ possède une seule solution réelle α.

$x = \dfrac{7x-12}{3x-5}$ $\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$ **$x = 2$**

c) Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in\mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n-\alpha}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est arithmétique.

Puisque : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n > 2$, la suite **$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$** telle que: $\forall n \in\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n-2}$ **est bien définie**

De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}-2} = \dfrac{3u_n-5}{u_n-2} = 3 + \dfrac{1}{u_n-2} = 3 + v_n$: la suite **$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 3**

d) Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n **e)** En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite

On a : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n = 3n + v_0 = \dfrac{6n+1}{2}$**. D'où , **$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{6n+1} + 2$** On en déduit que **$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2**