FONCTIONS CONTINUES DE ℝ DANS ℝ

A ETUDE LOCALE D'UNE FONCTION

I) Limite d'une fonction en un point a

1) Limite

I est un intervalle de ℝ , f une fonction définie sur I et $a\in\mathbb{R}$ est un élément de I ou (extrémité de I). Soit $b\in\mathbb{R}$.

Définition : On dit que **f admet b pour limite en a** ssi :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta\in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x\in I,\ |x-a|\le\delta \Rightarrow |f(x)-b|\le\varepsilon.$$

Théorème: Si f admet b pour limite en a alors le nombre b est unique.

Définition: Cet unique b est appelé **limite** de la fonction f en a et on note :

$$b = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_a f$$

Dem: Supposons par l'absurde qu'il existe deux éléments distincts b et b' tels que :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\delta_1\in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x\in I,\ |x-a|\le\delta_1 \Rightarrow |f(x)-b|\le\varepsilon$ **(1)** et

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists\delta_2\in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x\in I,\ |x-a|\le\delta_2 \Rightarrow |f(x)-b'|\le\varepsilon$ **(2)**

Prenons $\varepsilon = \frac{|b-b'|}{4}$. On a bien $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$ car on suppose $b\neq b'$. Ainsi d'après **(1)** et **(2)**

$\exists\delta_1\in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x\in I,\ |x-a|\le\delta_1 \Rightarrow |f(x)-b|\le\varepsilon$ et $\exists\delta_2\in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x\in I,\ |x-a|\le\delta_2 \Rightarrow |f(x)-b'|\le\varepsilon$

Soit $\delta=\inf(\delta_1,\delta_2)$. On a $\forall x\in I,\ |x-a|\le\delta \Rightarrow (|f(x)-b'|\le\varepsilon$ et $|f(x)-b|\le\varepsilon)$

Or : $b-b' = b-f(x)+f(x)-b'$. D'où : $|b-b'|\le|b-f(x)|+|f(x)-b'|$.

Ainsi : $\forall x\in I,\ |x-a|\le\delta \Rightarrow |b-b'|\le|b-f(x)|+|f(x)-b'|\le 2\varepsilon = \frac{|b-b'|}{2}$ ce qui est impossible si $|b-b'|>0$. On obtient donc une contradiction avec l'hypothèse de départ et donc le théorème est montré.

De même on pourrait définir la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ ou des limites infinies en a ou en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition : On dit que .... ssi ....

f admet b pour limite en a	$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \mid \forall x\in I, \lvert x-a\rvert\le\delta \Rightarrow \lvert f(x)-b\rvert\le\varepsilon$
f admet b pour limite en $+\infty$	$\forall\varepsilon>0, \exists K\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I, x\ge K \Rightarrow \lvert f(x)-b\rvert\le\varepsilon$
f admet b pour limite en $-\infty$	$\forall\varepsilon>0, \exists K\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I, x\le K \Rightarrow \lvert[f(x)-b\rvert\le\varepsilon$
f admet $+\infty$ pour limite en a	$\forall M\in\mathbb{R}, \exists\delta>0 \mid \forall x\in I, \lvert x-a\rvert\le\delta \Rightarrow f(x)\ge M$
f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$	$\forall M\in\mathbb{R}, \exists K\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I, x\ge K \Rightarrow f(x)\ge M$
f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$	$\forall M\in\mathbb{R}, \exists K\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I, x\le K \Rightarrow f(x)\ge M$
f admet $-\infty$ pour limite en a	$\forall M\in\mathbb{R}, \exists\delta>0 \mid \forall x\in I, \lvert x-a\rvert\le\delta \Rightarrow f(x)\le M$
f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$	$\forall M\in\mathbb{R}, \exists K\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I, x\ge K \Rightarrow f(x)\le M$
f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$	$\forall M\in\mathbb{R}, \exists K\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I, x\le K \Rightarrow f(x)\le M$

Définition : Si $a\in I$. On dit que **f est continue en a** ssi f admet f(a) pour limite en a i.e. :
$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \mid \forall x\in I, |x-a|\le\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|\le\varepsilon$

Remarque : Si $a\in I$ et si f a une limite finie en a, cette limite est nécessairement f(a)

Définition : Si $a\in\bar{I}$ avec $a\notin I$. On dit que **f est prolongeable par continuité en a** ssi f admet un prolongement sur $I\cup\{a\}$ continu en a.

Propriété: f prolongeable par continuité en a ssi f admet une limite finie en a.

Propriété: (i) Si $b\in\mathbb{R}$, dire que f admet b pour limite en a (éventuellement infinie) équivaut à dire que f – b admet 0 pour limite en a

(ii) Si $a\in\mathbb{R}$, dire que f admet b (éventuellement infinie) pour limite en a équivaut à dire que l'application $t\to f(a+t)$ admet b pour limite en 0

Dem: Les propriétés précédentes découlent directement des définitions

2) Limite à gauche et à droite

Définition : On appelle **gauche de a** : $]-\infty;a[$ et **droite de a** $]a;+\infty[$

Définition : Soit $a\in\bar{I}$ * On dit que **f admet une limite à gauche en a** si la restriction de f à $I\cap\,]-\infty;a[$ admet une limite en a. On note $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ cette limite à gauche

* On dit que **f admet une limite à droite en a** si la restriction de f à $I \cap]a,+\infty[$ admet une limite en a. On note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ cette limite à droite

Exemple: Si a est un point intérieur à I montrer que f admet une limite en a ssi f admet des limites à droite et à gauche en a et que ces limites sont égales

Définition : * On dit que **f est continue à gauche en a** ssi la restriction de f à $I\cap]-\infty;a]$ est continue en a.

* On dit que **f est continue à droite en a** ssi la restriction de f à $I\cap[a;+\infty[$ est continue en a.

Exemple: La fonction $x \to E(x)$ est continue à droite en tout point mais n'est continue à gauche que sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.

3) Fonctions ayant une limite et fonctions bornées

Théorème: Soit f une fonction admettant une limite finie en a ($a \in \overline{\mathbb{R}}$). Alors f est bornée au voisinage de ce point .

Remarque: "f bornée au voisinage de a" signifie qu'il existe un intervalle J_a tel que f est bornée sur $I\cap J_a$ avec J_a de la forme $[a-\delta;a+\delta]$ ($\delta>0$) si a fini, J_a de la forme $[M,+\infty[$ si $a = +\infty$ et J_a de la forme $]-\infty;M]$ si $a = -\infty$.

Dem: * Si a fini. Soit $\varepsilon = 1$. $\exists\delta>0 \mid \forall x\in I\cap[a-\delta;a+\delta]$, $|f(x) - b| \le \varepsilon = 1$. Soit $M = |b| + 1$

On a : $\forall x\in I\cap[a-\delta;a+\delta]$, $|f(x)| \le |f(x)-b| + |b| \le M$

* Si $a = +\infty$. Soit $\varepsilon = 1$. $\exists K\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I\cap[K;+\infty[$, $|f(x) - b| \le \varepsilon = 1$. Soit $M = |b| + 1$

On a : $\forall x\in I\cap[K;+\infty[$, $|f(x)| \le |f(x)-b| + |b| \le M$

Théorème: Soit f une fonction admettant une limite b strictement positive en a ($a \in \overline{\mathbb{R}}$) . Alors f est minorée, au voisinage de ce point, par un réel k strictement positif .

Dem: Soit $\varepsilon = \frac{b}{2}$ et $k = \frac{b}{2}$. On a $\varepsilon > 0$ et $k > 0$

* Si a fini. $\exists\delta>0 \mid \forall x\in I\cap[a-\delta;a+\delta]$, $|f(x) - b| \le \frac{b}{2}$. On a alors $\forall x\in I\cap[a-\delta;a+\delta]$,

* Si $a = +\infty$. $\exists M\in\mathbb{R} \mid \forall x\in I\cap[M;+\infty[$, $|f(x) - b| \le \frac{b}{2} = 1$. On a alors $\forall x\in I\cap[K;+\infty[$, $f(x) \ge b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} = k$

4) Compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre

Théorème: Soient f et g deux fonctions définies sur I. On suppose que : $\forall x \in I, |f(x)| \le g(x)$ et on suppose que g admet 0 pour limite en a. Alors f admet 0 pour limite en a.

Dem: Soit $\varepsilon > 0$. $\exists\delta>0 \mid \forall x\in I\cap[a-\delta;a+\delta]$, $|g(x)| \le \varepsilon$. On a alors $\forall x\in I\cap[a-\delta;a+\delta]$, $|f(x)| \le \varepsilon$

Théorème: Soient f , g et h trois fonctions définies sur I. On suppose que :
$\forall x \in I, h(x) \le f(x) \le g(x)$ et on suppose que h et g admettent b pour limite commune en a.
Alors f admet b pour limite en a.

Dem: Soit $\varepsilon > 0$. $\exists\delta_1>0 \mid \forall x\in I\cap[a-\delta_1;a+\delta_1]$, $|h(x) - b| \le \varepsilon$, $\exists\delta_2>0 \mid \forall x\in I\cap[a-\delta_2;a+\delta_2]$, $|g(x) - b| \le \varepsilon$.

Soit $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$. On a $\delta>0$ et : $\forall x \in I\cap[a-\delta;a+\delta]$, $-\varepsilon \le h(x) - b \le f(x) - b \le g(x) - b \le \varepsilon$ i.e. $|f(x) - b| \le \varepsilon$

Théorème: Soit f une fonction définie sur I admettant b pour limite en a.
Alors |f| admet |b| pour limite en a

Dem: Soit $\varepsilon > 0$. $\exists\delta>0 \mid \forall x\in I\cap[a-\delta;a+\delta]$, $|f(x) - b| \le \varepsilon$. Or $\forall x \in I$, $\big| |f(x)| - |b| \big| \le |f(x) - b|$

D'où $\forall x\in I\cap[a-\delta;a+\delta]$, $\big| |f(x)| - |b| \big| \le \varepsilon$

II) Opérations sur les limites

Théorème: Soient f et g deux fonctions définies sur I admettant des limites finies en a: b et m.
Alors : 1) f + g admet b + m pour limite en a
2) $f \times g$ admet $b\times m$ pour limite en a 3) Si $\lambda\in\mathbb{R}$, λf admet λb pour limite en a.

Dem: **1)** Soit $\varepsilon > 0$. $\exists\delta_1>0 \mid \forall x\in I\cap[a-\delta_1;a+\delta_1]$, $|f(x) - b| \le \frac{\varepsilon}{2}$, $\exists\delta_2>0 \mid \forall x\in I\cap[a-\delta_2;a+\delta_2]$, $|g(x) - m| \le \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$. On a $\delta>0$ et : $\forall x \in I\cap[a-\delta;a+\delta]$, $|(f(x) + g(x)) - (b + m)| \le |f(x) - b| + |g(x) - m| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon$

2) On a $\forall x \in I$, $| f(x)g(x) - bm| = | (f(x) - b) g(x) + l (g(x) - m) | \le |g(x)| |f(x) - b| + | b | |g(x) - m|$

Or g est bornée au voisinage de a : $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists\delta_3>0 \mid \forall x\in I\cap[a-\delta_3;a+\delta_3]$, $|g(x)| \le M$. On peut prendre $M \ge |b|$

D'autre part, $\exists\delta_1>0 \mid \forall x\in I\cap[a-\delta_1;a+\delta_1]$, $|f(x) - b| \le \frac{\varepsilon}{2M}$, $\exists\delta_2>0 \mid \forall x\in I\cap[a-\delta_2;a+\delta_2]$, $|g(x) - m| \le \frac{\varepsilon}{2M}$

Soit $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. On a $\delta>0$ et : $\forall x\in I\cap[a-\delta;a+\delta]$, $|f(x)\, g(x) - b\, m| \leq |g(x)|\, |f(x) - b| + |b|\, |g(x) - m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

3) On applique le résultat du 2) avec la fonction g constante égale à λ

Exercice: Montrer que le produit d'une fonction tendant vers 0 en a et d'une fonction bornée au voisinage de a est une fonction tendant vers 0 en a.

Théorème: Soit f une fonction définie sur I admettant une limite non nulle b en a. Alors la fonction $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a et admet $\frac{1}{b}$ pour limite en a

Dem: | f| admet une limite strictement positive en a : |b|. Donc $\exists k > 0$, $\exists\, \delta_1>0$; $\forall x\in I\cap[a-\delta_1;a+\delta_1]$, $|f(x)| \geq k$

Ainsi $\frac{1}{f}$ est définie sur $I\cap[a-\delta_1;a+\delta_1]$. D'autre part, on a : $\forall x\in I\cap[a-\delta_1;a+\delta_1]$, $\left|\frac{1}{f}(x) - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - f(x)|}{|b\, f(x)|} \leq \frac{|b - f(x)|}{|b\, k|}$.

Par passage à la limite dans un encadrement, on a : $\frac{1}{f} - \frac{1}{b}$ admet 0 pour limite en a donc $\frac{1}{f}$ admet $\frac{1}{b}$ pour limite en a

Corollaire: Soient f et g deux fonctions définies sur I admettant deux limites finies b et m avec m non nulle. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de a et admet $\frac{b}{m}$ pour limite en a

Dem: On utilise les résultats sur l'inverse et sur le produit.

Limite d'une composée

Théorème: Soit f de I vers J. Soit g de J vers $\mathbb{R}$. Soit a et b deux points, a dans I (ou extrémité de I) et b dans J (ou extrémité de J). On suppose que f admet b pour limite en a et g admet m pour limite en b
Alors la fonction g o f admet m pour limite en a

Dem: Soit $\varepsilon>0$. $\exists\, \delta>0$; $\forall y\in J\cap[b-\delta;b+\delta]$, $|g(y) - m| \leq \varepsilon$

Or, puisque $\delta>0$, $\exists \mu>0$ $\forall x\in I\cap[a-\mu;a+\mu]$, $|f(x) - b| \leq \delta$. Mais alors, $f(x)\in J\cap[b-\delta;b+\delta]$ donc $|g(f(x)) - m| \leq \varepsilon$

D'où on a bien construit $\mu>0$ tel que : $\forall x\in I\cap[a-\mu;a+\mu]$, $|g(f(x)) - m| \leq \varepsilon$

Image d'une suite convergente : caractérisation séquentielle de la limite

Théorème: Soit f de I vers $\mathbb{R}$. Soit a dans I (ou extrémité de I). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I convergeant vers a. On suppose que f admet b pour limite en a
Alors la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b

Dem: Soit $\varepsilon>0$. $\exists\, \delta>0$; $\forall x\in I\cap[a-\delta;a+\delta]$, $|f(x) - b| \leq \varepsilon$

Or, puisque $\delta>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$; $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow |x_n - a| \leq \delta$. Mais alors, $x_n\in I\cap[a-\delta;a+\delta]$ donc $|f(x_n) - b| \leq \varepsilon$

D'où on a bien construit entier N tel que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow |f(x_n) - b| \leq \varepsilon$

Théorème de la limite monotone

Théorème: Soit f monotone sur I. Soit a dans I (ou extrémité de I). Alors f possède des limites (finies ou non) à gauche (si a extrémité de $I \cap]-\infty, a[$) et à droite en a (si a extrémité de $I \cap]a, +\infty[$)
De plus, si f est croissante, alors : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \sup\limits_{x<a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \inf\limits_{x>a} f(x)$
De plus, si f est décroissante, alors : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \inf\limits_{x<a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \sup\limits_{x>a} f(x)$

Dem: On travaille avec f croissante. Il faut étudier trois cas : **1)** a dans I et n'est pas une extrémité de I
2) a est dans I et est une extrémité de I **3)** a est une extrémité de I et n'est pas dans I

1) Soit $B = \{y \mid \exists\, x\in I\cap]-\infty, a[\ ; y = f(x)\} = f(I\cap]-\infty, a[)$. On a $B \neq \varnothing$ et B majorée car : $\forall\, x\in I\cap]-\infty, a[$, $f(x) \leq f(a)$ car f est croissante. Donc B possède une borne supérieure M.
Soit alors $\varepsilon>0$. Par la caractérisation de borne supérieure, $\exists\, x_1 \in I\cap]-\infty, a[$; $M - \varepsilon < f(x_1)$.
Mais alors, si on pose $\delta = |a - x_1| > 0$, on a : $\forall t\in I\cap]-\infty, a[$, $|t-a| \leq \delta \Rightarrow M - \varepsilon < f(x_1) \leq f(t) \leq M$ i.e. $|f(t) - M| \leq \varepsilon$
D'où f admet une limite à gauche en a et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \sup\limits_{x<a} f(x)$
De même en travaillant avec $f(I\cap]a, +\infty[)$, on trouve $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \inf\limits_{x>a} f(x)$

2) Si $a = \sup(I)$ alors $f(I\cap]-\infty, a[)$ est majorée par f(a) et on se trouve dans le même cas que **1)**
Si $a = \inf(I)$ alors $f(I\cap]a, +\infty[)$ est minorée par f(a) et on se trouve dans le même cas que **1)**

3) Si $a = \sup(I)$ alors * soit $f(I\cap]-\infty, a[)$ est majorée et on se trouve dans le même cas que **1)**
* soit $f(I\cap]-\infty, a[)$ n'est pas majorée et on montre que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$: En effet :
$\forall M \in\mathbb{R}$, $\exists x_1 \in I \mid f(x_1) > M$. Or f croissante, donc $\forall x \in I$, $x \geq x_1 \Rightarrow f(x) \geq f(x_1) > M$

B FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE

I) Espace vectoriel des fonctions continues sur un intervalle I

Soit I une intervalle de $\mathbb{R}$. f une fonction de I vers $\mathbb{R}$.

Définition : On dit que **f est continue sur I** ssi f est continue en tout point de I

Définition équivalente : f continue sur I $\Leftrightarrow \forall a \in I$, $\lim_a f$ existe et vaut f(a)

Notation : On note C(I) l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$

Théorème: 1) $\forall (f,g) \in C(I)^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $(f+g,\ f\times g,\ \lambda f) \in C(I)^3$. De plus si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g} \in C(I)$

2) $\forall (f,g) \in C(I)^2$, $\sup(f,g) \in C(I)$, $\inf(f,g) \in C(I)$ et $|f| \in C(I)$

Dem: **1)** On utilise les résultats correspondants pour les limites.

2) Soit $a \in I$. * **Si f(a) > g(a)**. Comme f – g admet une limite strictement positive en a, il existe un voisinage de a inclus dans I sur lequel f – g est strictement positive. Sur ce voisinage, on a : sup(f,g) = f et inf(f,g) = g. Comme f et g sont continues en a, sup(f,g) et inf(f,g) sont aussi continues en a

* **Si f(a) < g(a)** on inverse les rôles de f et de g dans le point précédent.

* **Si f(a) = g(a) = b** . Soit $\varepsilon > 0$. $\exists \delta_1 > 0 \mid \forall x \in I, |x-a| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

et $\exists \delta_2 > 0 \mid \forall x \in I, |x-a| \leq \delta_2 \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon$. On pose $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$. On a $\delta > 0$ et

$\forall x \in I, |x-a| \leq \delta \Rightarrow |\sup(f(x),g(x)) - b| < \varepsilon$ et $|\inf(f(x),g(x)) - b| < \varepsilon$: inf(f,g) et sup(f,g) sont continues en a.

Pour la continuité de |f| on écrit que |f| = sup(f,–f) et on utilise ce que l'on vient juste d'établir.

Continuité d'une composée

Théorème: Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f continue de I vers J. Soit g continue de J vers $\mathbb{R}$. Alors la fonction g o f est continue sur I

Dem: On utilise le résultat obtenu pour la limite d'une composée.

II) Prolongement, restriction

Restriction

Définition : Soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $J \subset I$.

On appelle **restriction de f à J** la fonction $J \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$.

Notation : On note $f_{|J}$ la restriction de f à J

Théorème: Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $J \subset I$. Soit f une fonction continue de I vers $\mathbb{R}$. Alors la fonction $f_{|J}$ est continue sur J

Dem: Soit $a \in J$. Soit $g = f_{|J}$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue sur I donc en a, on a :

$\exists \delta > 0 \mid \forall x \in I, |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. En particulier, $\forall x \in J, |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ i.e. $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$

Ainsi g est continue en a. Ceci étant vrai pour tout a dans J, on a g continue sur J.

Prolongement

Définition : Soit f une fonction de I vers $\mathbb{R}$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $I \subset J$.

On appelle **prolongement de f à J** toute fonction g de J vers $\mathbb{R}$, vérifiant : $\forall x \in I$, g(x) = f(x)

Théorème: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ une extrémité de I avec $a \notin I$. Soit $f \in C(I)$. On suppose de plus que f admet une limite finie b en a. Alors la fonction g : $I \cup \{a\} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ si $x \in I$ et $a \to b$ est une fonction continue sur $I \cup \{a\}$.

Dem: Provient directement de la définition de la continuité sur un intervalle.

Définition : La fonction précédente est appelée prolongement continu de f en a (ou on dit que l'on a prolonger f par continuité en a en posant g(a) = b)

III) Images d'intervalles par une fonction continue

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires: Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $(a,b) \in I^2$ avec $a \leq b$. Alors toute valeur comprise entre f(a) et f(b) et atteinte par la fonction f sur [a,b].

Dem: Quitte à changer f en –f, on peut supposer $f(a) \leq f(b)$. On considère d une valeur comprise entre f(a) et f(b). On construit alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :
* On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$: on a $a_0 \leq b_0$ et $f(a_0) \leq d \leq f(b_0)$
* Supposons construits a_n et b_n tels que $a_n \leq b_n$ et $f(a_n) \leq d \leq f(b_n)$. On pose $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

- Si $f(c_n) \leq d$ on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$
- Si $f(c_n) > d$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$

Dans les deux cas on a $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et $f(a_{n+1}) \leq d \leq f(b_{n+1})$
La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 (car géométrique de raison $\frac{1}{2}$).

Donc les suites sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune $c \in [a,b]$.
De plus, puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c, que f est continue en c et que $\forall n\in\mathbb{N}\ f(a_n) \leq d$, on a en passant à la limite dans cette inégalité large, $f(c) \leq d$. De même on montre que $d \leq f(c)$. Ainsi $f(c) = d$

Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème : Image d'un intervalle par une fonction continue: Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors f(I) est un intervalle

Dem: Il suffit de montrer que f(I) est une partie convexe de $\mathbb{R}$
Soit $(x_1,x_2)\in f(I)^2$ avec $x_1 \leq x_2$. On doit montrer $[x_1,x_2] \subset f(I)$ c'est à dire : $\forall x\in[x_1,x_2]$, $x\in f(I)$.
Soit alors $x\in[x_1,x_2]$. Puisque $x_1\in f(I)$, $\exists t_1\in I \mid x_1 = f(t_1)$. De même $\exists t_2\in I \mid x_2 = f(t_2)$.
Puisque x est une valeur comprise entre x_1 et x_2, on a, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'existence d'une valeur t comprise entre t_1 et t_2 (donc dans I car I est convexe) telle que $x = f(t)$. Ainsi $x \in f(I)$
Donc f(I) est bien une partie convexe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que f(I) est un intervalle de $\mathbb{R}$

Image d'un segment par une fonction continue

Théorème : Soit f une fonction continue sur un segment. Alors f est bornée et atteint ses bornes

Dem: (non exigible) On va d'abord montrer que f est bornée puis quelle atteint ses bornes supérieure et inférieure.

1) Supposons par l'absurde que f n'est pas majorée. Alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists x_n\in[a,b] \mid f(x_n) > n$.
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, on peut, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, lui extraire une sous–suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit c la limite de cette suite extraite. Puisque f est continue en c, on a $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers f(c) donc $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Cela contredit la relation : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geq n$.
Ainsi f est majorée. De même on montre par l'absurde que f est minorée

2) Soit $M = \sup_{[a,b]}(f)$. Par caractérisation de la borne supérieure, on a : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\exists x_n\in[a,b] \mid M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, on peut, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, lui extraire une sous–suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit c la limite de cette suite extraite. Puisque f est continue en c, on a $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers f(c). Or on a :
$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $M - \frac{1}{n} \leq M - \frac{1}{\varphi(n)} \leq f(x_{\varphi(n)}) \leq M$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers M. Par unicité de la limite, on a $M = f(c)$. Ainsi f atteint sa borne supérieure. De même on montre que f atteint sa borne inférieure.

Corollaire : Soit f une fonction continue sur un segment [a,b]. Alors f([a,b]) est un segment

Dem: L'image de [a,b] est un intervalle car f continue, borné (d'après le résultat précédent). De plus f atteint ses bornes. D'où $f([a,b]) = [m,M]$ où $m = \inf_{[a,b]}(f)$ et $M = \sup_{[a,b]}(f)$

IV) Bijections continues

Caractérisation de la continuité des fonctions monotones sur un intervalle

Théorème : Soit f une fonction monotone sur un intervalle I. Si f(I) est un intervalle alors f est continue sur I

Dem: (Non exigible) Supposons f croissante

- Soit a un point de I qui n'est pas sa borne supérieure. Comme f est croissante, f admet en a une limite à droite : λ

On a de plus : $f(a) \leq \lambda$ et $\lambda = \inf_{x>a} f(x)$. Puisque f est croissante : $\forall x\in I$, $x \leq a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$ et $x > a \Rightarrow f(x) \geq \lambda$

Supposons par l'absurde que $f(a) < \lambda$. Les inégalités précédentes affirment alors que f n'atteint aucune des valeurs strictement comprises entre f(a) et λ. Mais, puisque a n'est pas la borne supérieure de I, il existe b dans I tel que $a < b$.

Mais alors, puisque $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$, toutes les valeurs comprises entre f(a) et λ sont entre f(a) et f(b). D'autre part toutes les valeurs comprises entre f(a) et f(b) sont atteintes par f depuis I. On aboutit donc à une contradiction.
Ainsi, si a n'est pas la borne supérieure de I, f est continue à droite en a

- De même on montre que f est continue à gauche en tout point a de I qui n'est pas sa borne inférieure.
- Ainsi f est continue sur I

Caractérisation de la monotonie pour les fonctions continues injectives sur un intervalle

Théorème : Soit f une fonction continue injective sur un intervalle I. A lors f est strictement monotone sur I

Dem: (Non exigible) Supposons f continue injective.
Par l'absurde, supposons f non strictement monotone. Donc il existe (a,b,c) dans I tels que $a < b < c$ et f(b) extremum de {f(a), f(b), f(c)}, et comme f injective, c'est un extremum strict. Quitte à changer f en – f, on peut supposer qu'il s'agit d'un minimum. On considère alors A le minimum entre f(a) et f(c).
Soit alors $\gamma \in]f(b), A[$. On a $\gamma \in]f(b), f(a)[$, donc d'après le th des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]a,b[$ tel que $\gamma = f(\alpha)$.
De même, il existe $\beta \in]b,c[$ tel que $\gamma = f(\beta)$. On trouve une contradictino avec l'injectivité de f.
Aussi f est strictement monotone sur I

Continuité de la bijection réciproque sur un intervalle

Théorème : Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. Alors :
1) J = f(I) est un intervalle de ℝ et f est une bijection de I vers J
2) Sa bijection réciproque est strictement monotone, de même monotonie que f et continue de J vers I

Dem: **1)** f est injective car elle est strictement monotone. De plus elle est surjective de I vers f(I). Enfin puisque f est continue et I intervalle de ℝ, f(I) est un intervalle : J.
2) Sa réciproque est strictement monotone de même monotonie . Par exemple si f est croissante , on a :
Soit $(t,u)\in J^2$ avec $t < u$, $\exists (x,y) \in I^2 \mid t = f(x)$ et $u = f(y)$. De plus, puisque f est strictement croissante, on a nécessairement $x < y$.
Or $x = f^{-1}(t)$ et $y = f^{-1}(u)$. D'où : $\forall (t,u)\in J^2$, $t < u \Rightarrow f^{-1}(t) < f^{-1}(u)$: f^{-1} strictement croissante.
De plus l'image de l'intervalle J par f^{-1} est un intervalle (puisque c'est I) : donc d'après le théorème précédent, f^{-1} est continue sur J.

C) CAS DES FONCTIONS A VARIABLES REELLES ET A VALEURS COMPLEXES

a) Limite

I est un intervalle de ℝ , $f\in \mathcal{F}(I,\mathbb{C})$, $a\in \overline{I}$. Soit $b\in\mathbb{C}$.

Définition : On dit que f admet b pour limite en a ssi :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \delta\in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x\in I, \ |x - a| \le \delta \Rightarrow \left| f(x) - b\right| \le \varepsilon.$$

Théorème: Si f admet b pour limite en a alors le nombre b est unique.

Définition: b est appelé limite de la fonction f en a et on note :$b = \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{a} f$

Dem: Comme pour ℝ

Propriété: Soit $f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ et $a\in \overline{I}$.

1) **f admet une limite en a ssi Re(f) et Im(f) admettent une limite en a.**
2) **Le cas échéant, $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} \mathrm{Re}(f) + i \lim\limits_{a} \mathrm{Im}(f)$**

Propriété: Soit $f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$, $a\in \overline{I}$. Si f admet une limite en a alors f est bornée au voisinage de a

Propriété: Soit $(f,g)\in(\mathcal{F}(I,\mathbb{C}))^2$ et $a\in \overline{I}$. Si f (resp. g) admet l (resp. m) pour limite en a, alors

1) f +g admet l+m pour limite en a **2) fg admet lm pour limite en a**

Dem: Comme pour ℝ

b) Continuité

Définition : Si $a\in I$. On dit que f est continue en a ssi f admet f(a) pour limite en a i.e. :
$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \mid \forall x \in I, |x-a| \le \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \le\varepsilon$

Définition : On dit que f est continue sur I ssi f continue en tout point de I

Remarque: L'ensemble $\mathcal{C}(I,\mathbb{C})$ des fonctions continues sur I est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$

Remarque: Le thèorème des valeurs intermédiaires ne se prolonge pas