MPSI 14-15 Feuille n° 11 : Fonctions continues

Du 27/11/14 au 05/12/14

Exercice 1. Soit f une application continue bijective de $[0,1] \to [0,1]$. Montrer que $\{f(0), f(1)\} = \{0,1\}$

Exercice 2. Montrer qu'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est bornée et atteint ses bornes

Exercice 3. Soit f de $[a,b] \to [a,b]$ vérifiant : $\forall (x,y) \in [a,b]^2, x \neq y \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < |x-y|$.
Montrer que f est continue et que possède un unique point fixe. Peut-on remplacer $[a,b]$ par $]a,b[$?

Exercice 4. Soit f une fonction continue de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$. Pour x dans $[a,b]$, on note $M(x) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.
Montrer que la fonction M est croissante et continue sur $[a,b]$.

Exercice 5. Soit f une application continue de $[0,1] \to [0,1]$. Montrer que : $\exists x \in [0,1] \Big| f(x) = x$.
Que dire si on remplace l'intervalle $[0,1]$ par $]0,1[$?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ où $l \in]0,1[$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} (f(n))^n$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que : $\forall (a,y) \in \mathbb{R}^2, 2\,f(x+y) = f(2x) + f(2y)$.
On pose $g(x) = f(x) = f(0)$. Montrer que g est impaire, puis que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, $g(nx) = n\,g(x)$, puis que : $\forall r \in \mathbb{Q}$, $g(r) = r\,g(1)$. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x\,g(1)$. Conclure.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que : $\forall (a,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$.
Montrer que f est impaire, puis que : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = n\,f(x)$, puis que : $\forall r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = r\,f(1)$.
Calculer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $a > 0$.

1. Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = a^{\left(\frac{1}{2^n}\right)}$. Calculer $\lim_{n \to +\infty} f(x_n)$
2. On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = f(x^2)$. Montrer en utilisant le 1) que f est constante.
3. . Soit $\lambda \in]-1,1[$. On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x^2) = \lambda f(x)$. Montrer que la fonction f est nulle.

Exercice 10. Déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, continues en 0 et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(3x) = f(x)$

Exercice 11.
1. Montrer que la fonction indicatrice (ou caractéristique) de $\mathbb{Q}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$
2. Etudier la continuité de $f : x \longrightarrow \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1-x}{2} \right\rfloor$. (on pourra commencer par représenter f)

Exercice 12. Soit $f :]a,b[\longleftarrow \mathbb{R}$ continue, strictement croissante. Montrer que $f(]a,b[)$ est un intervalle ouvert.

Exercice 13. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall x \in I$, $|f(x)| < 1$. Etudier, pour $I =]0,2[$ puis pour $I = [0,2]$, la véracité des assertions : **a)** $\forall x \in I, \exists k \in]0,1[\, | f(x) < k$ **b)** $\exists k \in]0,1[\, | \forall x \in I, f(x) < k$
.

Exercice 14. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $[a,b] \subset f([a,b])$. Montrer que : $\exists x \in [a,b]\, | f(x) = x$.
Ce résultat est-il toujours vrai si on remplace $[a,b]$ par $]a,b[$?

Exercice 15. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longleftarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que si $f(I)$ est un ensemble fini alors f est constante .

Exercice 16.

1. Soit f continue de $[0,1] \to [0,1]$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists a_n \in [0,1] \,\Big|\, f(a_n) = (a_n)^n$.
2. Si de plus f est strictement décroissante, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, a_n est unique. Etudier $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 17. Soit $(f,g) \in (\mathscr{C}^0([0,1]), \mathbb{R})^2 \,\Big|\, (f(0)-g(0)) \times (f(1)-g(1)) \leqslant 0$.
Montrer que : $\exists\, x_0 \in [0,1] \,|\, f(x_0) = g(x_0)$.

Exercice 18. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux applications continues de I vers $\mathbb{R}$ telles que f ne s'annule pas et $|f| = |g|$. Montrer que : $f = g$ ou $f = -g$

Exercice 19. Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Etudier la continuité de la fonction : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 21. Soit $f \in (\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant $+\infty$ pour limite en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que :
$\exists x_0 \in \mathbb{R} \,\Big|\, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f(x_0)$