A) RELATIONS DE COMPARAISON

I) Relations de comparaison : Cas des suites

1) Négligeabilité, domination, équivalence

On se place dans le cadre des suites réelles.

Négligeabilité, domination

Définition: Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$** $\exists(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \alpha_n.\varepsilon_n$.

Notation: On note : $u_n = o(\alpha_n)$

Définition: Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$** ssi $\exists$ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée telle que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \alpha_n.b_n$.

Notation: On note : $u_n = O(\alpha_n)$

Remarque: Si $u_n = o(\alpha_n)$ alors $u_n = O(\alpha_n)$

Caractérisation à l'aide du quotient

Propriété : Caractérisation à l'aide du quotient :

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels.

(i) $u_n = o(\alpha_n) \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{\alpha_n}\right)$ converge vers 0 (ii) $u_n = O(\alpha_n) \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{\alpha_n}\right)$ bornée

Dem: Découle immédiatement des définitions.

Equivalence

Définition: Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels non nuls. On dit que **les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes** ssi $(u_n-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.e. ssi $\exists$ $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = v_n.(1+\varepsilon_n)$

Notation: On note : $u_n \sim v_n$

Caractérisation à l'aide du quotient

Propriété : Caractérisation à l'aide du quotient :

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels non nuls. $u_n \sim v_n \Leftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers 1 $\Leftrightarrow \left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge vers 1

Dem: Découle de la définition.

Remarque: Si $u_n \sim (\alpha_n)$ alors $u_n = O(\alpha_n)$

Remarque: La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites ne s'annulant pas à partir d'un cettain rang.

Opérations avec les équivalents

Propriété : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites de réels non nuls. On suppose que l'on a : $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$. Alors $u_n.w_n \sim v_n.t_n$ et $\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{t_n}$

Dem: On utilise la caractérisation de l'équivalence à l'aide du quotient :

$\frac{u_n.w_n}{v_n.t_n} = \frac{u_n}{v_n}.\frac{w_n}{t_n} \to 1$ et $\frac{u_n.t_n}{v_n.w_n} = \frac{u_n}{v_n}.\frac{t_n}{w_n} \to 1$ lorsque $n \to +\infty$

Remarque: On ne peut rien dire sur les sommes

Exemple: On a : $u_n = 1 + \frac{1}{n} \sim v_n = 1 + \frac{2}{n}$ et $w_n = -1 + \frac{2}{n} \sim t_n = -1 + \frac{3}{n}$

Pourtant on n'a pas : $u_n+w_n \sim v_n + t_n$ car on n'a pas $\frac{3}{n} \sim \frac{5}{n}$

Propriété : **Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels non nuls.**
Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n = u_n - v_n$. Alors : $w_n = o(v_n) \Rightarrow u_n \sim v_n$

Dem: On pose $w_n = v_n.\varepsilon_n$ et on a bien $u_n = v_n.(1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$

Propriété : **Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels non nuls. Si $u_n \sim v_n$ alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n ont le même signe.**

Dem: $\frac{u_n}{v_n} \to 1$ lorsque $n \to +\infty$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$. $\exists n_0\in\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n} - 1\right| \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{u_n}{v_n} \geq \frac{1}{2}$ et donc u_n et v_n ont le même signe.

Propriété : **Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels non nuls telles que $u_n \sim v_n$. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite ℓ finie ou infinie, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède également ℓ pour limite.**

Dem: Cela provient de $\frac{u_n}{v_n} \to 1\ldots$

Remarque: Attention : deux suites ayant la même limite ne sont pas forcément équivalentes

Propriété : **Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels non nuls. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers une même limite ℓ finie et non nulle. Alors $u_n \sim v_n$.**

Dem: Cela provient de $\frac{u_n}{v_n} \to 1\ldots$

2) Comparaison de certaines suites usuelles

Théorème: **1) $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\alpha<\beta \Rightarrow n^\alpha = o(n^\beta)$**
2) $\forall(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$ **3) $\forall(\alpha,k)\in\mathbb{R}_+^* \times]1,+\infty[$, $n^\alpha = o(k^n)$**
4) $\forall(k,m)\in\mathbb{R}^2$, $|k| < |m| \Rightarrow k^n = o(m^n)$ **5) $\forall k\in\mathbb{R}$, $k^n = o(n!)$**

Dem: **1)** Soit $q_n = \frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta}$. On a $\ln(q_n) = (\alpha-\beta)\ln(n) \to -\infty$ lorsque $n \to +\infty$ Donc $q_n \to 0$ i.e. $n^\alpha = o(n^\beta)$

2) Soit $p_n = \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = \left(\frac{\ln n}{n^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha$. On pose $x = n^{\beta/\alpha}$ i.e. $n = x^{\alpha/\beta}$ On a : $\ln(n) = \frac{\alpha}{\beta}\ln(x)$. D'où $p_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha\left(\frac{\ln x}{x}\right)^\alpha$
Or lorsque $n \to +\infty$, $x \to +\infty$ et $\frac{\ln(x)}{x} \to 0$ Ainsi $p_n \to 0$ i.e. $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$

3) Soit $r_n = \frac{n^\alpha}{k^n}$. On a pour $n>0$, $\ln(r_n) = \alpha\ln(n) - n\ln(k) = n\left(\alpha\frac{\ln(n)}{n} - \ln(k)\right)$. On en déduit que : $\ln(r_n) \sim -n\ln(k)$. Ainsi lorsque $n \to +\infty$, $r_n \to 0$.

4) Soit $s_n = \frac{k^n}{m^n}$. On a : $\ln(s_n) = n(\ln(k) - \ln(m)) \to -\infty$ lorsque $n \to +\infty$

5) Soit $p_n = \frac{k^n}{n!}$. On a $\frac{p_{n+1}}{p_n} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc, à partir d'un certain rang N,
$|p_{n+1}| \leq \frac{1}{2}p_n$. On a alors: $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq N \Rightarrow |p_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} p_N$. D'où $p_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$

Autres exemples usuels: On admet, temporairement, que si $u_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, on a :
$\ln(1+u_n) \sim u_n$, $\sin(u_n) \sim u_n$, $1 - \cos(u_n) \sim \frac{1}{2}(u_n)^2$, $\tan(u_n) \sim u_n$, $\exp(u_n) - 1 \sim u_n$

II) Négligeabilité, domination, équivalence pour les fonctions

Cadre : On travaille avec a un point de I ou une extrémité de I (éventuellement infinie)
On rappelle qu'on appelle **voisinage de a** un intervalle J_a de la forme :

- $J_a =]a - \varepsilon; a + \varepsilon[\cap I$ avec $\varepsilon>0$ si a est fini
- $J_a =]c; +\infty[\cap I$ avec $c\in\mathbb{R}$ si $a = +\infty$
- $J_a =]-\infty; c[\cap I$ avec $c\in\mathbb{R}$ si $a = -\infty$

Définition : Soient f et φ deux fonctions de I vers $\mathbb{R}$, φ ne s'annulant pas sur $I\setminus\{a\}$.
On dit que **f est négligeable devant φ au voisinage de a** ssi il existe un voisinage J_a de a et une fonction h de J_a vers $\mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in J_a$, $f(x) = h(x)\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$

Notation : On note alors : $\mathbf{f = o(\varphi)}$ ou $f \underset{(a)}{=} o(\varphi)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} o(\varphi(x))$.

Définition : Soient f et φ deux fonctions de I vers ℝ, φ ne s'annulant pas sur I \{a}.

On dit que **f est dominée par φ au voisinage de a** ssi il existe un voisinage J_a de a et une fonction h de J_a vers ℝ tels que : $\forall x \in J_a$, $f(x) = h(x)\,\varphi(x)$ et h bornée

Notation : On note alors : $\mathbf{f = O(\varphi)}$ ou $f \underset{(a)}{=} O(\varphi)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{=} O(\varphi(x))$.

Propriété: Soient f et φ deux fonctions de I vers ℝ, φ ne s'annulant pas sur I \{a}.

Alors : 1) $f \underset{(a)}{=} o(\varphi) \Leftrightarrow \dfrac{f}{\varphi}$ **admet 0 pour limite en a 2)** $f \underset{(a)}{=} O(\varphi) \Leftrightarrow \dfrac{f}{\varphi}$ **bornée au voisinage de a**

Dem: Découle directement des définitions.

Définition : Soient f et g deux fonctions de I vers ℝ ne s'annulant pas sur I \{a}. On dit que **f et g sont équivalentes au voisinage de a** ssi f – g est négligeable devant f au voisinage de a

Notation : On note alors : $\mathbf{f \sim g}$ ou $f \underset{(a)}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{(a)}{\sim} g(x)$

Propriété: Soient f et g deux fonctions de I vers ℝ ne s'annulant pas sur I \{a}.

Alors : $f \underset{(a)}{\sim} g \Leftrightarrow \dfrac{f}{g}$ **admet 1 pour limite en a**

Dem: Découle directement de la définition.

Remarque: Dire " $f \underset{(a)}{\sim} g$ " équivaut à dire " $g \underset{(a)}{\sim} f$ "

Propriété: Soient f_1, f_2 , g_1 et g_2 quatre fonctions de I vers ℝ ne s'annulant pas sur I\{a}.

On suppose que $f_1 \underset{(a)}{\sim} f_2$ **et** $g_1 \underset{(a)}{\sim} g_2$ **Alors :** $f_1 \times g_1 \underset{(a)}{\sim} f_2 \times g_2$ **et** $\dfrac{f_1}{g_1} \underset{(a)}{\sim} \dfrac{f_2}{g_2}$

Dem: Découle de la caractérisation de l'équivalence à l'aide du quotient

Propriété: Soient f et g deux fonctions de I vers ℝ ne s'annulant pas sur I\{a}.

On suppose que $f \underset{(a)}{\sim} g$ **Alors : le signe de f(x) est égal à celui de g(x) au voisinage de a**

Dem: Puisque $\dfrac{f}{g}$ admet 1 pour limite en a, $\dfrac{f}{g}$ est minorée, au voisinage de a, par un réel strictement positif. Sur ce voisinage, f(x) et g(x) sont donc du même signe.

Exercice: Si f = φ + h avec h négligeable devant φ, alors f ~ φ

III) Comparaison des fonctions usuelles

Théorème fondamental: $\ln t = o(t)$ **en + ∞**

Dem: Soit t>1. Puisque $\forall u \in [1,t]$, $\sqrt{u} < u < u^2$, on a : $\displaystyle\int_1^t \frac{du}{u^2} \leq \int_1^t \frac{du}{u} \leq \int_1^t \frac{du}{\sqrt{u}} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{t} \leq \ln(t) \leq 2\sqrt{t} - 2$

D'où $\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{\ln(t)}{t} \leq 2\,\dfrac{\sqrt{t} - 1}{t}$ et donc par convergence par encadrement $\dfrac{\ln(t)}{t}$ tend vers 0 lorsque t tend vers + ∞

Théorème: Comparaison des logarithmes et des puissances

1) $\forall \alpha>0, \forall \beta>0,\ (\ln t)^\alpha = o(t^\beta)$ **en + ∞ 2)** $\forall \alpha>0, \forall \beta>0,\ (\ln |t|)^\alpha = o\left(\dfrac{1}{|t|^\beta}\right)$ **en 0**

Dem: 1) On pose $u = t^{\beta/\alpha}$ et on utilise le théorème fondamental

2) On pose $u = \dfrac{1}{|t|}$ et on utilise le résultat 1)

Théorème: Comparaison des puissances et des exponentielles

1) $\forall \alpha>0, \forall \beta>0,\ t^\alpha = o(e^{\beta t})$ **en + ∞ 2)** $\forall \alpha>0, \forall \beta>0,\ e^{-\alpha t} = o\left(\dfrac{1}{t^\beta}\right)$ **en + ∞**

Dem: 1) On pose $u = e^t$ et on utilise le théorème précédent

2) On pose $u = e^{-t}$ et on utilise le théorème précédent

B) DEVELOPPEMENTS LIMITES

I) Définition, opérations algébriques

Définition

Définition: Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, f fonction de I , a un point de I ou une extrémité de I. Soit $n \in \mathbb{N}$
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a si et seulement si, il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que : $f(a + t) - P_n(t) = o(t^n)$ lorsque t tend vers 0 (i.e. lorsque a + t tend vers a)

Propriété: Si f admet un DL à l'ordre n en a, le polynôme P_n entrant dans la définition est unique

Dem: Si P_n et Q_n sont deux polynômes de degré inférieur ou égal à n tels que : $f(a + t) - P_n(t) = o(t^n)$ et $f(a + t) - Q_n(t) = o(t^n)$. On a alors : $P_n(t) - Q_n(t) = o(t^n)$.
Or si P_n et Q_n étaient différents, on aurait l'existence d'un réel β non nul et d'un entier $p \leq n$ tel que $P_n(t) - Q_n(t) \sim \beta t^p$ (p étant le degré minimum pour lequel les coefficients en X^p de P_n et de Q_n sont distincts)
Mais alors on aurait $\beta t^p = o(t^n)$ ce qui est faux puisque β est non nul et $p \leq n$.

Définition: On appelle alors ce polynôme P_n : **la partie régulière** du DL_n de f en a.
On notera le DL sous la forme : $f(a + t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + ... + \alpha_n t^n + o(t^n)$
ou encore sous la forme normalisé : $f(a + t) = t^p (\beta_0 + \beta_1 t + ... + \beta_q t^q + o(t^q))$ avec $\beta_0 \neq 0$
On a alors : $f(a + t) \sim \beta_0 t^p$

Propriété: Si f admet un DL à l'ordre n en a, alors f admet un DL à tout ordre $p \leq n$ en a , la partie régulière P_p du DL_p étant la troncature de degré p de la partie régulière P_n

Dem: Si on a : $f(a + t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + ... + \alpha_p t^p + ... + \alpha_n t^n + o(t^n)$. Puisque $\forall k > p$, $\alpha_k t^k = o(t^p)$, que la somme d'un nombre fini de termes négligeables devant t^p est négligeable devant t^p et que ce qui est négligeable devant t^n est aussi négligeable devant t^p (Attention à la réciproque), On a : $f(a + t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + ... + \alpha_p t^p + o(t^p)$

Propriété: Si f est une fonction paire (resp. impaire) admettant un DL à l'ordre n en 0, la partie régulière du DL_n de f est paire (resp. impaire)

Dem: Si f est paire. Soit P_n la partie régulière du DL_n de f et Q_n celle du DL_n de $x \to f(-x)$. Par unicité du DL_n de g, on a $Q_n(x) = P_n(-x)$. Comme f est paire, on a par unicité de la partie régulière : $P_n(-x) = P_n(x)$: P_n paire.

DL d'une somme

Propriété: Si f et g admettent des DL à l'ordre n en a, alors f + g admet un DL à l'ordre n et la partie régulière du DL est la somme des parties régulières des DL de f et de g.

Dem: Si P_n et Q_n sont deux polynômes de degré inférieur ou égal à n tels que : $f(a + t) - P_n(t) = o(t^n)$ et $g(a + t) - Q_n(t) = o(t^n)$. On a alors : $(f(a + t) + g(a+t)) - (P_n(t) + Q_n(t)) = o(t^n)$
Comme $P_n + Q_n$ est un polynôme de degré $\leq$ n, on a bien trouvé un développement limité de f + g en a à l'ordre n

DL d'un produit

Propriété: Si f et g admettent des DL à l'ordre n en a, alors $f \times g$ admet un DL à l'ordre n et la partie régulière du DL est la troncature de degré n du produit des parties régulières des DL de f et de g.

Dem: Si P_n et Q_n sont deux polynômes de degré inférieur ou égal à n et ε_1 et ε_2 de limite 0 en a tels que :
$f(a + t) = P_n(t) + t^n \varepsilon_1(t)$ et $g(a + t) = Q_n(t) + t^n \varepsilon_2(t)$
Aussi : $(f \times g)(a+t) = P_n(t)Q_n(t) + t^n (\varepsilon_1(t)Q_n(t) + \varepsilon_2(t)P_n(t) + t^n\varepsilon_1(t)\varepsilon_2(t))$
De plus on peut écrire, $P_n(t)Q_n(t) = R_n(t) + t^{n+1} T(t)$ où R_n est la troncature de P_nQ_n et T est un polynôme.
D'où : $(f \times g)(a+t) = R_n(t) + t^n (\varepsilon_1(t)Q_n(t) + \varepsilon_2(t)P_n(t) + t^n\varepsilon_1(t)\varepsilon_2(t) + t\, T(t)) = R_n(t) + t^n \varepsilon(t)$

DL d'un quotient

Propriété: Si u est une fonction de limite 0 en 0 et admettant un DL à l'ordre $n \geq 1$ en 0, alors la fonction $\dfrac{1}{1-u}$ admet un DL à l'ordre n en 0.

La partie régulière du DL de $\frac{1}{1-u}$ étant obtenue en remplaçant dans la somme $\sum_{k=0}^{n}(u(t))^k$ tous les termes u(t) par la partie régulière du DL de u(t) et en ne conservant que les termes de degré ≤ n

Dem: Puisque u admet 0 pour limite en 0, on a $u(t) \neq 1$ pour t suffisamment proche de 0

Aussi $\frac{1}{1-u(t)} = \sum_{k=0}^{n}(u(t))^k + (u(t))^n\frac{u(t)}{1-u(t)}$.

Or, puisque u admet un DL à l'ordre n≥1 en 0 et que u est de limite 0 en 0, on a l'existence d'un réel a et d'une fonction ε de limite 0 en 0 tels que : $u(t) = a\,t + t\,\varepsilon(t)$. Aussi $(u(t))^n\frac{u(t)}{1-u(t)} = t^n\,(a+\varepsilon(t))^n\,\frac{u(t)}{1-u(t)} = o\,(t^n)$

D'autre part, tous les $(u(t))^k$ admettent un DL en 0 à l'ordre n donc la somme $\sum_{k=0}^{n}(u(t))^k$ aussi

II) Obtention des DL des fonctions usuelles

Formule de Taylor - Young

Théorème: Formule de Taylor – Young **Si f est de classe C^n sur I, alors f admet un DL à l'ordre n en tout point a de I. Plus précisément : $f(a+t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(a) + o(t^n)$**

Dem: On utilise un résultat que l'on peut montrer par récurrence (ou que l'on verra sous le nom de "formule de Taylor avec reste intégral") que l'on a : $f(a+t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(a) + t^n\int_0^1\frac{(1-u)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+ut)\,du$

D'où : $f(a+t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(a) + t^n\int_0^1\frac{(1-u)^{n-1}}{(n-1)!}\left(f^{(n)}(a+ut) - f^{(n)}(a)\right)du$ car $\int_0^1\frac{(1-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,du = \frac{1}{n!}$

On pose $\varepsilon(t) = \int_0^1\frac{(1-u)^{n-1}}{(n-1)!}\left(f^{(n)}(a+ut) - f^{(n)}(a)\right)du$. On a : $|\varepsilon(t)| \leq \int_0^1\frac{(1-u)^{n-1}}{(n-1)!}\left|f^{(n)}(a+ut) - f^{(n)}(a)\right|du$. On va montrer que ε(t) tend vers 0 lorsque t tend vers 0

<u>Soit α > 0</u> . Puisque $f^{(n)}$ est continue en a, ∃δ> 0 tel que : $\forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)| \leq \alpha$

Mais alors si $|t| \leq \delta$, on a $\forall u \in [0,1]$, $|ut| \leq \delta$ donc $\forall u \in [0,1]$, $|f^{(n)}(a+ut) - f^{(n)}(a)| \leq \alpha$

Ainsi, si $|t| \leq \delta$, on a : $|\varepsilon(t)| \leq \alpha\int_0^1\frac{(1-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,du = \frac{\alpha}{n!} \leq \alpha$.

Intégration d'un DL

Théorème: **Si f admet un DL_n en a de la forme $f(a+t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n + o(t^n)$ et si F est une primitive de f, alors F admet un DL en a à l'ordre n+1 :**

$$F(a+t) = F(a) + \alpha_0 t + \alpha_1\frac{t^2}{2} + \ldots + \alpha_n\frac{t^{n+1}}{n+1} + o(t^{n+1})$$

Dem: On pose $P_n(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n$ et $Q_n(t) = \alpha_0 t + \alpha_1\frac{t^2}{2} + \ldots + \alpha_n\frac{t^{n+1}}{n+1}$

On a : $f(a+t) = P_n(t) + t^n\,\varepsilon(t)$ et $F(a+t) - F(a) = \int_0^t f(a+u)\,du$ D'où $F(a+t) = F(a) + Q_n(t) + \int_0^t u^n\,\varepsilon(u)\,du$

<u>Soit α>0</u>. On sait qu'il existe un certain δ> 0 tel que : $\forall u,\ |u| \leq \delta \Rightarrow |\varepsilon(u)| \leq \alpha$

Ainsi, si $|t| \leq \delta$, on a :

$$\left|\int_0^t u^n\,\varepsilon(u)\,du\right| \leq \left|\int_0^t u^n\,\varepsilon(u)\,du\right| \leq \left|\int_0^t\left|u^n\,\varepsilon(u)\right|du\right| \leq \left|\int_0^t\alpha\left|t^n\right|du\right| = \alpha\left|t^{n+1}\right|$$

Ainsi $\int_0^t u^n \varepsilon(u)\ du = o(t^{n+1})$: c'est bien ce que l'on cherchait à montrer .

Remarque: On ne peut rien dire de l'existence d'un DL pour la dérivée : la fonction f définie par f(0) = 0 et $f(t) = t^4 \sin\left(\frac{1}{t^4}\right)$ si $t \neq 0$, est dérivable, admet un DL_3 alors que f' n'a pas de DL_1 en 0

III) Tableau des DL usuels

Voir à la dernière page

IV) Applications des DL

Les développements limités sont pratiques pour déterminer des limites car, contrairement aux équivalents, ils sont utilisables dans une somme (à condition de bien faire attention aux ordres).

Outre l'obtention des limites, ils permettent d'étudier les branches infinies des graphes de fonctions ou des courbes paramétrées et d'étudier les positions relatives des courbes par rapport aux tangentes, asymptotes ...

Ils permettent aussi de déterminer la nature d'un point stationnaire d'une courbe paramétrée

Etude locale d'une courbe au voisinage d'un point

On veut étudier l'allure du graphe d'une fonction f au voisinage du point a.

On effectue alors un DL de f en a à un ordre $n \geq 2$ tel que $f(a + t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n + o(t^n))$ avec $\alpha_n \neq 0$ et $\alpha_k = 0$ pour tout k dans]1,n[.

On a alors : la droite d'équation $Y = \alpha_1 (X - a) + \alpha_0$ est tangente à ka courbe en a et :

- si n est pair : le graphe de f est du même coté de la tangente au voisinage de a
- si n est impair : le graphe de f traverse la tangente au voisinage de 0

En particulier, **si a est un point critique (donc $\alpha_1 = 0$), a est un extremum de f ssi n est pair**

V) Développement asymptotique

Définition: Si a est un réel, on appelle **développement limité généralisé** de f en a, l'écriture de f(a + t) comme somme de puissances positives ou négatives de t, écrites dans l'ordre d'importance décroissante.

Par exemple, on peut montrer que l'on a, pour t au voisinage de 0, $\text{cotan}(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{3} + o(t^2)$

on appelle cette écriture, le développement à la précision t^2 de cotan(t)

Définition: Pour $a = \pm\infty$, on appelle **développement limité généralisé** de f en a, l'écriture de f(t) comme somme de puissances positives ou négatives de t, écrites dans l'ordre d'importance décroissante.

Par exemple, on peut montrer que l'on a, pour t au voisinage de $+\infty$, $\arctan(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

on appelle cette écriture, le développement à la précision $\frac{1}{t^2}$ de arctan(t)

Plus généralement, on parlera de développement asymptotique d'une fonction ou d'une suite, une écriture du même type qu'un DL ou DLG mais pouvant faire intervenir des termes dfférents des t^k ou n^α

Théorème : Formule de Stirling $\mathbf{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$.

Tableau des DL usuels

Tous les développements limités donnés sont au voisinage de 0

Fonction	Développement limité en 0	Méthode d'obtention
exponentielle	$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + o(t^n)$	On applique la formule de Taylor à la fonction exp dont les dérivées $k^{\text{ièmes}}$ sont elle-même
$t \to a^t$ $a \in \mathbb{R}_+^*$	$a^t = 1 + \frac{t}{1!}\ln a + \frac{t^2}{2!}(\ln a)^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}(\ln a)^n + o(t^n)$	On écrit $a^t = e^{t\ln(a)}$ et soit on utilise le DL de e^u avec u = t ln(a) soit on calcule les dérivées $k^{\text{ièmes}}$ de $t \to a^t$
cosinus hyperbolique	$\operatorname{ch} t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots + \frac{t^{2p}}{(2p)!} + o(t^{2p+1})$	On utilise ch t = ½ (e^t+e^{-t}) et les DL de e^t et e^{-t}. On peut aussi calculer les dérivées $k^{\text{ièmes}}$ de ch
sinus hyperbolique	$\operatorname{sh} t = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots + \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(t^{2p+2})$	Comme pour ch...
cosinus	$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} + o(t^{2p+1})$	Soit on utilise une formule d'Euler, soit on écrit cos(t) = ch(it), soit on utilise le fait que la dérivée $k^{\text{iéme}}$ de cos en t est $\cos(t+k\frac{\pi}{2})$
sinus	$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots + (-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(t^{2p+2})$	Comme pour cos
Puissance $t \to (1+t)^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$	$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \cdots$ $+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdot(\alpha-n+1)}{n!}t^n + o(t^n)$	On connaît les dérivées $k^{\text{ièmes}}$ des puissances et on les utilise dans la formule de Taylor-Young
Racine carrée	$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + \cdots$ $+ (-1)^{p+1}\frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2p-3)}{2\times 4\times 6\times\ldots 2p}t^p + o(t^p)$	On applique le résultat précédent avec α = ½
Inverse	$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \cdots + t^n + o(t^n)$	On utilise la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique
Inverse (bis)	$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + o(t^n)$	On applique le résultat précédent avec -t
Logarithme	$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{t^n}{n} + o(t^n)$	Intégration du DL précédent
arctan	$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} + o(t^{2n+2})$	On intègre le DL de $\frac{1}{1+t^2}$
tan	$\tan t = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + o(t^6)$ généralisation mal aisée	Soit on fait le quotient de sin par cos, soit on travaille avec des coefficients indéterminés en disant (tan)'(t) = 1 + $\tan^2 t$