Devoir en temps libre n° 7

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

Problème : Equations fonctionnelles des fonctions usuelles

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que : $\exists \alpha \in \mathbb{R} \,|\, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$

2. (a) Montrer, en étudiant la fonction $t \to \ln(bt) - \ln(t)$ et en utilisant le fait que ln est la primitive de $t \to \frac{1}{t}$ s'annulant en 1 , que la fonction ln vérifie : $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

   (b) Montrer que $\log_a$ (définie par $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ où a est un rél strictement positif et différent de 1) vérifie : $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

   (c) Montrer, en utilisant le fait que exp est la bijection réciproque de ln, que la fonction exp vérifie l'équation fonctionnelle : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)\, f(y)$

   (d) Montrer que les fonctions exponentielles (les fonctions $t \to a^t$), vérifient l'équation fonctionnelle : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)\, f(y)$

   (e) Montrer que les fonctions puissances vérifient l'équation fonctionnelle : $\forall(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, f(x\,y) = f(x)\, f(y)$

3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)\, f(y)$

   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$ (exprimer $f(x)$ en fonction de $x/2$)

   (b) Montrer que f est soit la fonction nulle soit une fonction ne s'annulant jamais

   (c) Dans le cas où f ne s'annule jamais, déterminer une équation fonctionnelle vérifiée par $g = \ln \circ f$

   (d) Déterminer alors toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)\, f(y)$

4. Déterminer alors toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que : $\forall(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, f(x\,y) = f(x) + f(y)$ (Etudier $g = f \circ \exp$)

5. Déterminer alors toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que : $\forall(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, f(x\,y) = f(x)\, f(y)$ (Etudier $g = f \circ \exp$)

6. On pose, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2, f(a,b) = \arctan(a) + \arctan(b)$

   (a) On suppose $a > 0$. Montrer que :

      i. Si $ab = 1$, alors $f(a,b) = \frac{\pi}{2}$

      ii. Si $ab < 1$, alors $f(a,b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

      iii. Si $ab > 1$, alors $f(a,b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$

   (b) En déduire les expressions de $f(a,b)$ lorsque $a \leqslant 0$

CORRECTION

Exercice 1 : Équation différentielle (E) : $\left(1+x^2\right)y'+(1-x)^2\,y=x^3+x^2-3x+3$

1. On cherche une solution sous la forme : $y_0 : x \to ax+b$ où a et b sont des réels à déterminer.
   y_0 est dérivable et on a : $\forall x\in\mathbb{R}, y_0'(x)=a$. Donc :
   y_0 solution de $(E) \iff \forall x\in\mathbb{R}, a(1+x^2)+(ax+b)\times(1-x)^2=x^3+x^2-3x+3$

   $$\iff \forall x\in\mathbb{R}, ax^3+(b-a)x^2+(a-2b)x+a+b\times(1-x)^2=x^3+x^2-3x+3$$

   $$\iff \begin{cases} a & =1\\ b-a & =1\\ a-2b & =-3\\ a+b & =3\end{cases} \quad (\text{ par identification}) \quad \iff \begin{cases} a & =1\\ b & =2\end{cases}$$

   Donc on a une et une seule droite qui est courbe intégrale de cette équation différentielle : il s'agit de $\boxed{\textbf{la droite d'équation } Y=X+2}$.

2. Soit $(H) : (1+x^2)\,y'+(1-x)^2\,y=0$ l'équation homogène associée à (E).
   Puisque : $\forall x\in\mathbb{R}, -\frac{(x-1)^2}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1}-1$, une primitive de la fonction $x\longrightarrow -\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ est la fonction $x\longrightarrow \ln(1+x^2)-x$. Ainsi les solutions de (H) sont les fonctions $\boxed{g_\lambda : x\longrightarrow \lambda\,(1+x^2)\,e^{-x}}$
   Connaissant la structure de l'ensemble des solutions de (E), on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est $\boxed{\textbf{l'ensemble des fonctions } f_\lambda : x\longrightarrow x+2+\lambda\,(1+x^2)\,e^{-x} \textbf{ où } \lambda\in\mathbb{R}}$

3. Parmi les courbes intégrales de (E) celle passant par le point de coordonnées $(0,h)$ est la courbe (C_h) de la fonction $y_h : x\longrightarrow x+2+(h-2)\,(1+x^2)\,e^{-x}$
   (a) On a clairement $\lim\limits_{x\to+\infty} y_h(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(y_h(x)-x-2)=0$ donc
   $\boxed{\textbf{la droite d'équation } Y=X+2 \textbf{ est asymptote à la courbe } (C_h)}$
   (b) En $-\infty$, (C_h) possède $\boxed{\textbf{une asymptote si } h=2 \textbf{ (la droite d'équation } Y=X+2)}$, ou $\boxed{\textbf{une branche parabolique d'axe } (Oy) \textbf{ si } h\neq 2}$.

Exercice 2 : Équations différentielles du second ordre

1. $(E_1) \quad : \quad y''+y'-6\,y=25\,e^{2x}+6\,e^{3x}$
   Les solutions de (E_1) sont les fonctions de la forme $\boxed{x\longrightarrow 5\,x\,e^{2x}+e^{3x}+A\,e^{2x}+B\,e^{-3x}}$
   Parmi celles-ci, celle qui vérifie le problème de Cauchy est $\boxed{x\longrightarrow \left(5\,x-\frac{11}{5}\right)e^{2x}+e^{3x}+\frac{6}{5}\,e^{-3x}}$

2. $(E_2) \quad : \quad y''-4\,y'+5\,y=e^{2x}\,\cos(x)$
   Les solutions de (E_2) sont les fonctions de la forme $\boxed{x\longrightarrow \frac{1}{2}\,x\,\sin(x)\,e^{2x}+A\,\sin(x)\,e^{2x}+B\,\cos(x)\,e^{2x}}$
   Parmi celles-ci, celle qui vérifie le problème de Cauchy est $\boxed{x\longrightarrow \frac{1}{2}\,x\,\sin(x)\,e^{2x}}$

Exercice 3 : Systèmes linéaires

1. $(S) \quad \begin{cases} x+(m+1)\,y & =m+2\\ mx+(m+4)\,y & =m^2+4\end{cases} \iff \begin{cases} x+(m+1)\,y & =m+2\\ (4-m^2)\,y & =4-2m\end{cases}$

   ☞ <u>Si $m=2$</u> Alors $(S) \iff \begin{cases} x+3y & =4\\ 0y & =0\end{cases} \iff x+3y=4$. Donc l'ensemble des solutions de (S) est $\boxed{\textbf{la droite d'équation } x+3y=4}$

   ☞ <u>Si $m=-2$</u> Alors $(S) \iff \begin{cases} x-y & =0\\ 0y & =8\end{cases}$. Donc $\boxed{(S) \textbf{ n'a pas de solution}}$

☞ Si $m^2 \neq 4$ Alors $(S) \iff \begin{cases} x+(m+1)\,y &= m+2 \\ (4-m^2)\,y &= 4-2m \end{cases} \iff \begin{cases} x &= \frac{m^2+2m+2}{m+2} \\ y &= \frac{2}{m+2} \end{cases}$.

Donc $\boxed{(S) \text{ a une et une seule solution : le couple } \left(\frac{m^2+2m+2}{m+2}, \frac{2}{m+2}\right)}$

2. $(S) \begin{cases} 2x+y+z &= 3 \\ 3x-y-2z &= 0 \\ x+y-z &= -2 \\ x+2y+z &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-z &= -2 \\ y+2z &= 3 \\ -y+3z &= 7 \\ -4y+z &= 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-z &= -2 \\ y+2z &= 3 \\ 5z &= 10 \\ 9z &= 18 \end{cases}$

D'où $(S) \iff \begin{cases} x+y-z &= -2 \\ y+2z &= 3 \\ z &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 1 \\ y &= -1 \\ z &= 2 \end{cases}$

Donc $\boxed{(S) \text{ a une et une seule solution : le triplet } (1,-1,2)}$

Exercice 4 : Sommes simples et sommes doubles

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+2j) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(i+2j)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2}+2j^2\right) = \frac{5}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j$

   Donc $S_1 = \frac{5}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+2j) = \frac{n(n+1)(5n+4)}{6}}$

2. $S_2 = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(i^2+2\,i\,j+j^2)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\,\frac{n(n+1)}{2}j+n\,j^2\right)$

   Donc $S_2 = n\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + n\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}}$

3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n^3-1} \left\lfloor \sqrt[3]{k} \right\rfloor$

   (a) $u_{n+1}-u_n = \displaystyle\sum_{k=n^3}^{(n+1)^3-1} \left\lfloor \sqrt[3]{k} \right\rfloor = \sum_{k=n^3}^{(n+1)^3-1} n$ donc $\boxed{u_{n+1}-u_n = 3n^3+3n^2+n}$

   (b) $u_n = u_1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}(u_{j+1}-u_j) = \sum_{j=1}^{n-1}(3j^3+3j^2+j)$ car $u_1 = 0$. D'où :

   $u_n = 3\,\frac{n^2(n-1)^2}{4} + 3\,\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}$ soit $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n^3-1} \left\lfloor \sqrt[3]{k} \right\rfloor = \frac{n^2(n-1)(3n+1)}{4}}$

4. $S_3 = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\left[x^j\binom{n}{j}\sum_{k=j}^{n}\binom{n-j}{n-k}\right] = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\left[x^j\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}\right]$

   Or $\displaystyle\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k} = \frac{n!}{j!(n-j)!}\times\frac{(n-j)!}{(k-j)!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{k!}{(k-j)!j!} = \binom{n}{k}\binom{k}{j}$ Ainsi :

   $S_3 = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\left[x^j\binom{n}{k}\binom{k}{j}\right] = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\left[x^j\binom{n}{k}\binom{k}{j}\right] = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x)^k$

   Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\left[x^j\binom{n}{j}\sum_{k=j}^{n}\binom{n-j}{n-k}\right] = (2+x)^n}$

Problème : Densité de $\{\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$ dans $[0,1]$

1. **Recherche d'un entier n tel que $\sqrt{n}$ ait pour premières décimales : $\cdots, 19\cdots$.**
On raisonne par analyse-synthèse

(a) **Analyse**.
Supposons qu'il existe un entier n tel que : $0,19 \leqslant \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor < 0,20$
On pose $k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ et $I_k = [k^2 + 0,38\,k + 0,0361; k^2 + 0,4\,k + 0,04[$
On a : $0,19 + k \leqslant \sqrt{n} < 0,20 + k$ donc $k^2 + 0,38\,k + 0,0361 \leqslant n < k^2 + 0,4\,k + 0,04$ i.e $\boxed{n \in I_k}$

(b) **Synthèse**.
Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose $I_p = [p^2 + 0,38\,p + 0,0361; p^2 + 0,4\,p + 0,04[$

i. Le diamètre de I_p est $\boxed{0.02\,p + 0,0039}$

ii. Lorsque p tend vers $+\infty$, ce diamètre tend vers $+\infty$. Ainsi $\boxed{\textbf{il existe } N \in \mathbb{N} \textbf{ tel que le diamètre de } I_N \textbf{ soit plus grand que } 1}$. Il suffit de prendre $\boxed{N = 50}$

iii. Soit $q = 50$. Puisque le diamètre de I_q est strictement supérieur à 1, l'intervalle I_q contient au moins un entier : $\boxed{I_q \bigcap \mathbb{N} \neq \varnothing}$

iv. Soit $n \in I_q \bigcap \mathbb{N}$. On a n entier et $q^2 + 0,38\,q + 0,0361 \leqslant n < q^2 + 0,4\,q + 0,04$ d'où $q \leqslant q + 0,19 \leqslant \sqrt{n} < q + 0,2 < q + 1$ avec q entier. Ainsi la partie entière de $\sqrt{n}$ est q et on trouve bien : $0,19 \leqslant \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor < 0,20$ i.e. $\boxed{\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \in [0,19; 0,20[}$.

(c) **Exemples**.

i. Avec $q \geqslant 50$, en prenant un entier dans I_q, cet entier vérifie l'encadrement voulu. Pour $q = 50$, $I_q = [2519,0361; 2520,04[$ donc
si on prend $\boxed{n = 2520}$, on a bien $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \in [0,19; 0,20[$
Pour $q = 51$, $I_q = [2620,4161; 2621,44[$ donc
si on prend $\boxed{n = 2621}$, on a bien $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \in [0,19; 0,20[$

ii. Pour avoir deux entiers consécutifs vérifiant l'encadrement, il suffit de trouver deux entiers consécutifs dans un intervalle I_q. On sera assuré d'une telle existence dès que le diamètre de I_q est strictement supérieur à 2. Cela est le cas pour $q = 100$ par exemple. Comme $I_{100} = [10038,0361; 10040,04[$, $\boxed{\textbf{les deux entiers } 10039 \textbf{ et } 10040}$ sont bien consécutifs et vérifient $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \in [0,19; 0,20[$

iii. Programme Python cherchant le plus petit entier n tel que $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \in [0,19; 0,20[$

```
>>> from math import *
>>> def partiefrac1():
>>>         n, p = 1, 0
>>>         while p < 0.19 or p >=0.2 :
>>>                 n = n + 1
>>>                 p = sqrt(n) - floor(sqrt(n))
>>>         return (n)
```

On trouve $\boxed{n = 27}$

2. **Étude du cas général** Soit $(a,b) \in [0,1]$ avec $a < b$

(a) Le diamètre de $I_N = \left[(N+a)^2; (N+b)^2\right[$ est $\delta = (b-a)(2N + a + b)$.
Donc en prenant, par exemple, $N = \left\lfloor \frac{1}{2(b-a)} \right\rfloor + 1$, on aura bien que
$\boxed{\textbf{le diamètre de } \left[(N+a)^2; (N+b)^2\right[\textbf{ est supérieur à } 1}$.

(b) Pour une telle valeur de N, le diamètre de I_N étant strictement supérieur à 1, il existe au moins un entier relatif dans cet intervalle I_N. Or la borne inférieure de I_N est positive donc l'entier trouvé l'est aussi : $\boxed{\left[(N+a)^2\,;(N+b)^2\right[\bigcap\mathbb{N}\neq\varnothing}$

(c) Soit $n\in\left[(N+a)^2\,;(N+b)^2\right[\bigcap\mathbb{N}$. On a : $N\leqslant N+a\leqslant\sqrt{n}<N+b\leqslant N+1$ avec N entier. Donc N est la partie entière de $\sqrt{n}$ et donc : $\boxed{\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor\in[a;b[}$

(d) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On choisit cette fois N tel que le le diamètre de I_N soit strictement supérieur à p. Il existe alors p entiers naturels consécutifs dans I_N. On note n le plus petit d'entre eux. Puisque n, $n+1$, …, $n+p-1$ sont dans $\left[(N+a)^2\,;(N+b)^2\right[\bigcap\mathbb{N}$, le calcul de la question précédente permet d'affirmer que :
$\boxed{\forall i\in[\![0,p-1]\!]\,,\sqrt{n+i}-\lfloor\sqrt{n+i}\rfloor\in[a;b[}$

(e) Programme Python cherchant le plus petit entier n tel que $\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor\in[a;b[$

```
>>> from math import *
>>> def partiefrac(a,b):
>>>         n, p = 1, 0
>>>         while p < a or p >=b :
>>>                 n = n + 1
>>>                 p = sqrt(n) - floor(sqrt(n))
>>>         return (n)
```

(f) Question subsidiaire En appelant la fonction précédente :

```
>>> partiefrac(0.8, 0.81)
```

On obtient que $\boxed{n=164 \textbf{ est le plus petit entier } n \textbf{ tel que } \sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor\in[0,80;0,81[}$