Devoir en temps libre n° 8

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

Problème : CONCOURS COMMUN I.N.A. E.N.S.A. 1997

Remarques préliminaires

Le but de ce problème est d'étudier des méthodes permettant d'obtenir des valeurs approchées de en mettant en évidence des suites dont $\sqrt{2}$ est la limite. On pourra utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées des termes successifs des suites, mais évidemment pas pour obtenir une valeur approchée de lui-même... On pourra par contre, utiliser, en les justifiant des encadrements usuels comme : $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$

PARTIE I Première approximation de $\sqrt{2}$

On définit la fonction f qui à tout réel x positif ou nul associe : $x^2 - 2$. On notera $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan, B son point d'intersection avec (Ox) et A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a, où a désigne un réel strictement positif. On supposera de plus que les points A et B sont distincts.

1. Montrer qu'on peut définir par récurrence une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathscr{C}$ de la manière suivante :
   ☞ M_0 est un point quelconque de $\mathscr{C}$ distinct de A et de B.
   ☞ Pour tout n entier naturel, M_{n+1} est le point de $\mathscr{C}$ de même abscisse que le point d'intersection de l'axe (Ox) avec la droite $(A\,M_n)$.

   On notera u_n l'abscisse de M_n et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général u_n .
   Montrer que l'on a, pour tout n entier naturel, la relation : $u_{n+1} = \frac{2+au_n}{a+u_n}$ et que M_{n+1} est distinct de A, de B et de M_n.
2. (a) Justifier, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a-\sqrt{2}}{a+u_n}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n : $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{a}\right| \times \left|u_n - \sqrt{2}\right|$ puis que : $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|1 - \frac{\sqrt{2}}{a}\right|^n \times \left|u_0 - \sqrt{2}\right|$
   (c) Comment peut-on choisir a pour pouvoir en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ? On précisera sa limite.
3. Dans cette question on suppose : $a = 1, u_0 = 2$.
   (a) Montrer qu'on a, pour tout entier naturel n non nul : $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
   En déduire un rang n_0 à partir duquel u_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.
   Justifier l'encadrement : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$
   (b) Cette question est destinée à préciser la rapidité de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par la relation : $v_n = \frac{u_n-\sqrt{2}}{u_n+\sqrt{2}}$.
   Montrer que c'est une suite géométrique. Préciser sa raison et son terme de rang 0.
   En déduire : $v_n = (-1)^n\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+2}$ puis la majoration : $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant 4 \times (0,2)^{n+1}$
   On dira que la convergence de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers sa limite est géométrique

PARTIE II La méthode de Newton (Algorithme de Babylone)

On reprend la courbe $\mathscr{C}$ définie dans la partie précédente.

1. (a) Montrer qu'il est possible de définir par récurrence une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les deux conditions :

☞ a_0 est un réel strictement positif.
☞ Pour tout n entier naturel, a_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe (Ox) avec la tangente en P_n à $\mathscr{C}$, P_n désignant le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a_n .
Déterminer une relation entre a_{n+1} et a_n .

(b) On considère la fonction g définie, pour tout réel x strictement positif par :

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$

(c) Montrer que, pour n non nul, a_n est supérieur ou égal à $\sqrt{2}$.
En déduire que, à partir du rang 1, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et admet une limite réelle.
Vérifier que cette limite est $\sqrt{2}$.

2. Cette question est destinée à préciser la rapidité de la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, on prend : $a_0 = 1,5$ et on considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $b_n = \frac{a_n-\sqrt{2}}{a_n+\sqrt{2}}$
   (a) Justifier la relation : $b_{n+1} = b_n^2$, pour tout entier naturel n.
   Déterminer une expression de b_n en fonction de n et de b_0 .
   (b) Vérifier : $b_0 \leqslant 0,04$
   (c) En déduire l'encadrement : $0 < a_n - \sqrt{2} \leqslant 3 \times (0,04)^{2^n}$
   On dira que la convergence de $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quadratique.
   (d) En déduire un rang n_1 à partir duquel a_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} prés.

PARTIE III Un problème de point fixe

Dans cette partie, on se propose de généraliser certains résultats mis en évidence dans les parties précédentes. On considérera une fonction ϕ définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle réel $I = [a,b]$. On note m un réel tel que, pour tout x de I, on ait : $|\phi'(x)| \leqslant m$ et on supposera que m est un réel strictement inférieur à 1. Enfin, on supposera qu'il existe α élément de I vérifiant la condition : $\phi(\alpha) = \alpha$. On se propose de trouver des valeurs approchées de α comme limite d'une suite et d'examiner la rapidité de la convergence de cette suite.

1. On définit par récurrence la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions :
   ☞ u_0 est élément d'un intervalle centré en α et inclus dans I.
   ☞ Pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = \phi(u_n)$
   En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est élément de I et justifier la relation, pour tout n entier naturel : $|u_n - \alpha| \leqslant m^n\, |u_0 - \alpha|$
   En déduire que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
2. On suppose désormais que ϕ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur I et que K est un réel tel que, pour tout x de I on ait : $|\phi''(x)| \leqslant K$. Dans cette question, on fera de plus les hypothèses supplémentaires suivantes : $\phi'(\alpha) = 0$ et $\phi''(\alpha) \neq 0$
   (a) On suppose la formule de Taylor-Lagrange affirmant :

$$\forall t \in I, \exists \theta \in]0,1[\; \Big| \; \phi(t) = \phi(\alpha) + (t-\alpha)\,\phi'(\alpha) + \frac{(t-\alpha)^2}{2}\,\phi''(\alpha + \theta\,(t-\alpha))$$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{K}{2} \times (u_n - \alpha)^2$ puis que
   $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{K}{2}\right)^{2^n-1} \times |u_0 - \alpha|^{2^n}$
   (b) En déduire que l'on peut choisir u_0 de manière à ce qu'il existe un réel strictement positif A et un réel q strictement compris entre 0 et 1 tel que : $|u_n - \alpha| \leqslant Aq^{2^n}$
   (c) **Application** En utilisant l'approximation de $\sqrt{2}$ trouvée dans la partie $I.3)a)$ et en appliquant les résultats précédents à la fonction g définie dans la partie II, donner un indice n_2 à partir duquel a_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.