Devoir en temps libre n° 9

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Intégrales de Wallis - Formule de Stirling

Le problème a pour but de démontrer la formule de Stirling affirmant $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi\, n}$. On va en donner plusieurs démonstrations mais toutes celles proposées utilisent un résultat sur les intégrales de Wallis.

PARTIE I Intégrales de Wallis

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)\, dt$ qu'on appelle intégrale de Wallis

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. En intégrant par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \Longrightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = I_n \times I_{n-1}$. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.
   En déduire T_n en fonction de n.
4. En utilisant le théorème des gendarmes, montrer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.
   En déduire à l'aide du 3, $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$
5. Soient $J_p = I_{2p}$ et $K_p = I_{2p+1}$. En écrivant la relation de récurrence liant J_p et J_{p+1}, montrer que $J_p = \dfrac{(2\,p)!}{2^{2p}\,(p!)^2}\,\dfrac{\pi}{2}$. Exprimer de même $K_p = I_{2p+1}$ en fonction de p.

PARTIE II Première approche de la formule de Stirling

On rappelle qu'un DL à l'ordre 3 de $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

1. Soit $f_n = \frac{1}{n^2}$. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
   (a) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (b) Montrer que : $\forall k > 1, \frac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^2}$ (on pourra s'aider d'un dessin)
   (c) En déduire que, pour $n \geqslant 1$, $S_n \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n}$.
   (d) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$.
   Montrer que, si $v_n \sim \frac{1}{n^2}$, alors $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
3. Soient $u_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$, $w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ et $W_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$.
   En utilisant un DL, montrer que : $w_n = \frac{1}{12\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Qu'en déduire pour $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
4. En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que : $n! \sim A\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.
5. En utilisant la partie I, calculer A et en déduire la formule de Stirling.

PARTIE III Seconde approche de la formule de Stirling

1. Soit $k > 0$ un entier et f la fonction réelle définie sur $[k, k+1]$ par $f(t) = \ln(t)$.
   Soit g la fonction affine sur $[k, k+1]$ et h la fonction affine sur $\left[k, k+\frac{1}{2}\right[$ et $\left[k+\frac{1}{2}, k+1\right]$ vérifiant :
   $f(k) = g(k) = h(k), \quad f(k+1) = g(k+1) = h(k+1), \quad f'(k) = h'(k)$ et $f'(k+1) = h'(k+1)$.
   (a) Représenter les courbes de f, g et h sur un même dessin, en précisant leurs positions relatives. (Attention : h n'est pas continue)
   (b) Par des considérations d'intégrales, prouver que :
   $$\frac{1}{2}(\ln(k) + \ln(k+1)) \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)\,dt \leqslant \frac{1}{2}(\ln(k) + \ln(k+1)) + \frac{1}{8k} - \frac{1}{8(k+1)}$$

2. On pose, pour $n > 0$ entier, $J_n = \displaystyle\int_1^n \ln(t)\,dt$, $K_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(\ln(k) + \ln(k+1))$ et
   $$L_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}(\ln(k) + \ln(k+1)) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right)$$
   (a) Exprimer J_n, K_n et L_n en fonction de n. On fera apparaître $\ln(n!)$ pour les dernières.
   (b) Démontrer que la suite $(J_n - K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc converge vers un réel ℓ .
   (c) Donner un équivalent simple de $n!$ en fonction de cette limite ℓ.
   (d) En utilisant la partie I, calculer ce réel ℓ. En déduire la formule de Stirling.

PARTIE IV Troisième approche de la formule de Stirling

1. Déterminer la monotonie et le signe sur $[0, 1[$ des trois fonctions définies par :
   $$f(x) = -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \ , \ g(x) = \frac{x^3}{3(1-x^2)} \text{ et } h(x) = f(x) - g(x)$$

2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $(2n+1)\,f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ et $(2n+1)\,g\left(\frac{1}{2n+1}\right)$
   (b) On considère les suites de termes généraux : $u_n = \dfrac{n^{\frac{2n+1}{2}}e^{-n}}{n!}$ et $v_n = u_n\,e^{\frac{1}{12n}}$.
   Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   (c) Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite.
   (d) En déduire qu'il existe un réel λ tel que $n! \sim \lambda n^{\frac{2n+1}{2}}e^{-n}$.
   Déterminer λ à l'aide de la partie I
   (e) Quelle est la limite de $w_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$ quand n tend vers $+\infty$?

WALLIS John (1616 - 1703) *mathématicien anglais qui a été le premier à écrire π comme produit d'un nombre infini de rationnels : il montra (cf Partie I) que $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8...}{1.3.3.5.5.7.7.9.9...}$ mais ce produit converge très lentement.*

STIRLING James (1692 - 1770) *mathématicien anglais. Sa formule est remarquable car elle fait intervenir π dans un domaine (les probabilités) où on ne l'attendait pas. De plus, cette formule $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$ permet d'avoir un très bon ordre de grandeur de $n!$*