DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 7 CORRECTION

PROBLEME : Equations fonctionnelles des fonctions usuelles

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que : $\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$

- Tout d'abord remarquons que **$f(0) = 0$ et f impaire**. En effet, $f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) = 0$ car $f(0) = 0$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$
- Fixons $x \in \mathbb{R}$. Soit P_n la propriété de récurrence : "$f(nx) = n f(x)$ "
  - * P_0 est vraie car $f(0) = 0$
  - * Si P_n est vraie. Alors $f((n+1)x) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x)$ car P_n vraie. Ainsi P_{n+1} est vraie
  - * Ainsi par le théorême de récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n vraie ie **$\forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$**
- Le résultat précédent étant vrai pour tout x et f étant impaire, on a : **$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$**
- Soit $r \in \mathbb{Q}$. On peut écrire r sous la forme : $r = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

  En utilisant le résultat précédent avec $x = \frac{1}{q}$ et successivement avec $n = p$ et $n = q$ on obtient :

  $f(r) = p\, f\left(\frac{1}{q}\right)$ et $f(1) = q\, f\left(\frac{1}{q}\right)$. Ainsi $f(r) = \frac{p}{q} f(1) = r\, f(1)$. Aussi on vient de montrer : **$\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = r\, f(1)$**
- Soit alors $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels convergeant vers x. Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(r_n) = r_n f(1)$. Lorsque n tend vers $+\infty$ dans cette relation on a : $r_n f(1)$ qui tend vers $x f(1)$ et $f(r_n)$ tend vers $f(x)$ car f est continue en x. Par unicité de la limite on a $f(x) = x f(1)$.

Ainsi en posant $\alpha = f(1)$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$

2) a) Montrer que $\log_a$ vérifie : $\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}$, $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ où a est un réel strictement positif et différent de 1.

- Fixons $b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $t \to \ln(bt) - \ln(t)$

  h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $h'(t) = \frac{b}{bt} - \frac{1}{t} = 0$. Ainsi h est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$

  En particulier, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $h(t) = h(1) = \ln(b) - \ln(1) = \ln(b)$. Aussi $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(bt) = \ln(b) + \ln(t)$

  Ce résultat précédent étant vrai pour tout b, on a : **$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$**
- Soit alors $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a : **$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\log_a(xy) =$** $\frac{\ln(xy)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} + \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$ **$= \log_a(x) + \log_a(y)$**

b) Montrer que les exponentielles vérifient l'équation fonctionnelle : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$

Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \to e^{\lambda t}$.
On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$. On peut donc considérer la fonction $g = \ln \circ f$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \lambda x$.
Aussi : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x + y) = \lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y = g(x) + g(y)$ ie $\ln(f(x+y)) = \ln(f(x)) + \ln(f(y)) = \ln(f(x)f(y))$
Or ln est injective, donc **$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)\, f(y)$**

Ainsi les fonctions exponentielles vérifient l'équation fonctionnelle : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)\, f(y)$

c) Montrer que les puissances vérifient l'équation fonctionnelle : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(xy) = f(x)f(y)$

Fixons $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction : $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $t \to t^\alpha = e^{\alpha \ln(t)}$ On a :

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(xy) = e^{\alpha \ln(xy)} = e^{\alpha (\ln(x) + \ln(y))} = e^{\alpha \ln(x)}\, e^{\alpha \ln(y)} = f(x)\, f(y)$ en utilisant les équations fonctionnelles vérifiées par ln et exp

Ainsi les puissances vérifient l'équation fonctionnelle : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(xy) = f(x)f(y)$

3) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$. (Exprimer $f(x)$ en fonction de $x/2$)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 \geq 0$. Ainsi on a : **$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$**

b) Montrer que soit f est la fonction nulle soit f ne s'annule jamais.

- Supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.
  On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0)\, f(x - x_0) = 0$: f est la fonction nulle
- **Ainsi soit f ne s'annule jamais soit f est la fonction nulle.**

c) Dans le dernier cas, déterminer une équation fonctionnelle vérifiée par $g = \ln \circ f$

Si f n'est pas la fonction nulle alors elle ne s'annule pas, donc d'après a), f est strictement positive.
Ainsi on peut considérer la fonction $g = \ln \circ f$.
On a alors : **$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x + y) =$** $\ln (f(x + y)) = \ln (f(x)\, f(y)) = \ln(f(x)) + \ln(f(y))$ **$= g(x) + g(y)$**

d) Déterminer alors toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Soit f est une fonction continue vérifiant : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$. Alors : soit f est nulle soit la fonction $g = \ln \circ f$ existe, est continue et vérifie l'équation fonctionnelle : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$

Mais, à la question 1), on a montré qu'alors : $\exists\alpha\in\mathbb{R} \mid \forall x\in\mathbb{R}$, $g(x) = \alpha x$. Mais alors : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x}$

Ainsi les fonctions continues vérifiant : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$ sont les exponentielles et la fonction nulle.

4) Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que : $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$ (Etudier $g = f \circ \exp$)

Soit f est une fonction continue vérifiant : $\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$. On pose $g = f \circ \exp$

g est continue sur $\mathbb{R}$ car composée de deux fonctions continues

De plus, on a : $\forall(t,s)\in\mathbb{R}^2$, $g(t + s) = f(\exp(t + s)) = f(e^t e^s) = f(e^t) + f(e^s) = g(t) + g(s)$

Mais, à la question 1), on a montré qu'alors : $\exists\alpha\in\mathbb{R} \mid \forall t\in\mathbb{R}$, $g(t) = \alpha t$.

Ainsi : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = g(\ln(x)) = \alpha\ln(x)$:

Les fonctions continues vérifiant $\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$ sont la fonction nulle et les logarithmes

5) Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que : $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(xy) = f(x)\,f(y)$ (Etudier $g = f \circ \exp$)

Soit f est une fonction continue vérifiant : $\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $f(xy) = f(x)\,f(y)$. On pose $g = f \circ \exp$

g est continue sur $\mathbb{R}$ car composée de deux fonctions continues

De plus, on a : $\forall(t,s)\in\mathbb{R}^2$, $g(t + s) = f(\exp(t + s)) = f(e^t e^s) = f(e^t)\,f(e^s) = g(t)\,g(s)$

Mais, à la question 3), on a montré qu'alors : soit g est nulle soit $\exists\alpha\in\mathbb{R} \mid \forall t\in\mathbb{R}$, $g(t) = e^{\alpha t}$.

Ainsi : soit $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 0$ soit $\exists\alpha\in\mathbb{R} \mid \forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f(x) = g(\ln(x)) = e^{\alpha\ln(x)} = x^{\alpha}$

Donc les fonctions continues vérifiant $\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $f(xy) = f(x)\,f(y)$ sont la fonction nulle et les puissances

6) On pose : $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\arctan(a) + \arctan(b) = f(a,b)$. Montrer que, si $a>0$: $f(a,b) = \frac{\pi}{2}$ si $ab = 1$, $f(a,b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ si $ab<1$ et $f(a,b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$ si $ab>1$

En déduire une expression de $f(a,b)$ même si $a \le 0$.

- On rappelle tout d'abord que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\forall x\in\mathbb{R}_-^*$ $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

  et que h est impaire.

  En effet si on étudie la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ on a h dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$. Ainsi h est constante sur chaque intervalle constituant $\mathbb{R}^*$.

  Or $h(1) = \frac{\pi}{2}$ et $h(-1) = -\frac{\pi}{2}$. On obtient donc le résultat annoncé :

  $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $\forall x\in\mathbb{R}_-^*$ $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

- **Soit a>0**. On considère la fonction h définie par : $h(x) = \arctan(a) + \arctan(x) - \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$. h est définie

sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{a}\}$ et dérivable sur cet ensemble. De plus on a $\forall x\in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{a}\}$, $h'(x) = 0$ donc h est constante sur chaque intervalle constituant $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{a}\}$.

Or $h(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \arctan(a) + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{-a}\right) = \frac{\pi}{2} + \arctan(a) + \arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \pi$.

Ainsi , si $b>\frac{1}{a}$, $h(b) = \pi$ et si $b<\frac{1}{a}$, $h(b) = 0$

Aussi si $ab<1$, $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ et, si $ab>1$, $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$

- **Si a = 0,** on a clairement **$\forall b\in\mathbb{R}$, $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$**
- **Soit a<0**. on a : $\arctan(a) + \arctan(b) = -(\arctan(-a) + \arctan(-b))$ et donc la discussion précédente permet d'affirmer :

  si $ab<1$, $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ et, si $ab>1$, $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) - \pi$