Devoir surveillé N° 4 (4 heures)

Ce devoir est constitué d'un problème et de quatre exercices. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. La calculatrice est autorisée. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

Problème : Suite récurrente. Vitesse de convergence

1. **Suites adjacentes**
   (a) On considère la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
      i. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$
      ii. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(1+n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
      iii. En déduire la nature de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi que celle de $\left(\frac{H_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (b) On considère les suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(j_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par : $g_n = H_n - \ln(n)$ et $j_n = H_n - \ln(n+1)$
      i. Montrer que les suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(j_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. on pourra utiliser l'inégalité 1)a)i)
      On désigne par γ leur limite commune, que l'on appelle la constante d'Euler
      ii. Donner un encadrement de γ à 10^{-3} près

2. **Etude d'une suite récurrente**.
   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1-x)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in]0,1[$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
   (a) Etudier les variations de f
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   (c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = n\,u_n$
      i. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
      ii. En déduire qu'elle converge et que sa limite L appartient à $]0,1]$
      iii. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $w_n = n\,(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L(1-L)$.
      iv. On suppose ici $L \neq 1$. Montrer : $\exists n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow v_{n+1} - v_n \geqslant \frac{L(1-L)}{2n}$.
      En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (on pourra utiliser la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vue dans la partie précédente)
   (d) Dduire des questions précédentes que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = 1$

Exercice 1 : Images directes, images réciproques, injectivité, surjectivité

Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E vers F.

1. Montrer que : $\forall C \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(C)) \subset C$
2. Montrer l'équivalence : f est surjective $\Longleftrightarrow \forall C \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(C)) = C$
3. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est injective
   (b) $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2,\ f(A \bigcap B) = f(A) \bigcap f(B)$
   (c) $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(E \setminus A) \subset F \setminus f(A)$.

Exercice 2 : Relation d'équivalence

1. Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1+2x}{\sqrt{1+x^2}}$.
2. On considère la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \mathscr{R} y \Longleftrightarrow (1+2\,x)\sqrt{1+y^2} = (1+2\,y)\sqrt{1+x^2}$.
   Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$
3. Déterminer le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x pour cette relation selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$

Exercice 3 : Suite de zéros

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = x^n + 16x^2 - 9$

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une solution strictement positive, notée u_n.
   (b) Calculer u_1 et u_2
   (c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]0, \frac{3}{4}\right[$
2. (a) Montrer que : $\forall x \in]0, 1[\,, f_{n+1}(x) < f_n(x)$
   (b) En déduire le signe de $f_n\left(u_{n+1}\right)$, puis la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note l sa limite
3. (a) Déterminer la limite de $\left((u_n)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (b) En déduire la valeur de l

Exercice 4 : Suite récurrente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$

1. Etudier les variations de f
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f\left(u_n\right)$
   (a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{p+1}$
   (b) En déduire par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$
   (c) En déduire la convergence et l'éventuelle limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. (a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$
   (b) En déduire, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{u_n} \leqslant n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
4. (a) Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2 \Longrightarrow \frac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \Longrightarrow \frac{1}{u_n} \leqslant n + 2 + \ln(n)$
   (c) Qu'en déduire quant à la convergence (et l'éventuelle limite) de la suite $(n\,u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 5 : Suites usuelles

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4\,u_n - 2$. Exprimer u_n en fonction de n
2. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5\,u_{n+1} - 4\,u_n$. Exprimer u_n en fonction de n
3. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4\,u_{n+1} - 4\,u_n$. Exprimer u_n en fonction de n

CORRECTION

Problème : Suite récurrente. Vitesse de convergence

1. **Suites adjacentes**

   (a) i. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a : $\forall t \in [0,x], \frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1$ donc en intégrant entre 0 et x, on a : $\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x}$

   ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant l'encadrement précédent à $x = \frac{1}{k}$, on a : $\forall k \in [\![1,n]\!], \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$. Ainsi, en sommant pour tous les k entre 1 et n, on obtient :

   iii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(1+n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ soit $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(1+n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$

   iv. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}$. Par divergence par minoration, on en déduit que $\boxed{(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ diverge vers } +\infty}$. En divisant l'encadrement précédent par $\ln(n)$, on a $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}, \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} + \frac{n}{(n+1)\ln(n)}$. Ainsi d'après la convergence par encadrement, la suite $\boxed{\left(\frac{H_n}{\ln(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 1}$

   (b) Soit $g_n = H_n - \ln(n)$ et $j_n = H_n - \ln(n+1)$

   i. – $g_{n+1} - g_n = \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 0$. Donc la suite $\boxed{(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$

   – $j_{n+1} - j_n = \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0$. Donc la suite $\boxed{(j_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$

   – $g_n - j_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ $\boxed{\to 0 \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty}$.

   – Ainsi $\boxed{\text{les suites } (g_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (j_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes}}$

   – On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, j_n \leqslant \gamma \leqslant g_n$. Cet encadrement est à 10^{-3} près dès que $g_n - j_n \leqslant 10^{-3}$ Comme $g_n - j_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$, il suffit de prendre $n \geqslant 1000$. Comme $g_{1000} = 0.57772$ par excès et $j_{1000} = 0.57671$ par défaut, on en déduit $\boxed{\gamma = 0.577 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$

2. **Etude d'une suite récurrente.**

   (a) On montre aisément que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1-x)$ est croissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. De plus $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ et f positive sur $[0,1]$

   (b) Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : "$0 < u_n < \frac{1}{n+1}$"

   – $\mathscr{P}_1$ est-elle vraie ? On a $f(]0,1[) = \left]0, \frac{1}{4}\right]$ donc $0 < u_1 = f(u_0) \leqslant \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ Donc $\boxed{\mathscr{P}_1 \text{ est vraie}}$

   – On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ? On a $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$ et f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{n+1}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Donc $0 < u_{n+1} \leqslant f\left(\frac{1}{n+1}\right)$. Or $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2(n+2)} < \frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{1}{n+2}$. Ainsi $0 < u_{n+1} < \frac{1}{n+2}$. Donc $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie}}$

   – Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \mathscr{P}_n \text{ est vraie}}$

   Par ailleurs, on a $0 < u_0 < 1$, donc on a bien : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < \frac{1}{n+1}}$. Par convergence par encadrement, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$

   (c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = n\,u_n$

i. $v_{n+1} - v_n = (n+1)u_n(1-u_n) - nu_n = u_n(1-(n+1)u_n) > 0$ d'après le b). Donc $\boxed{\textbf{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ est croissante}}$.

ii. Toujours d'après le b), on a : $0 \leqslant v_n < 1$ Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1. Donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{\textbf{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ est convergente}}$ De plus sa limite L vérifie : $v_1 \leqslant L \leqslant 1$ et donc $\boxed{L \in]0,1]}$

iii. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. On a : $w_n = v_n(1-u_n-v_n)$ qui est le produit de suites convergentes vers L et $1-L$. Donc $\boxed{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ converge vers } L(1-L)}$.

iv. Si $L \neq 1$ donc $L < 1$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif $L(1-L)$. Donc cette suite est minorée par $\frac{L(1-L)}{2}$ à partir d'un certain rang n_0 On a alors : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Longrightarrow v_{n+1} - v_n \geqslant \frac{L(1-L)}{2n}}$. Pour $n > n_0$, on a $v_n = v_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) \geqslant v_{n_0} + \dfrac{L(1-L)}{2}(H_{n-1} - H_{n_0})$ Aussi, par divergence par minoration, $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

(d) Cette divergence vers $+\infty$ étant incompatible avec la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers L, on a une contradiction avec l'hypothèse $L \neq 1$. On a donc $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ converge vers } 1}$ i.e. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\,u_n = 1}$

Exercice 5 : Suites usuelles

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4\,u_n - 2$ est une suite arithmetico-géométrique. En cherchant une constante α telle que la suite $(u_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique, on trouve que $\left(u_n - \frac{2}{3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de rapport 4 avec $v_0 = \frac{1}{3}$. Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3}(4^n + 2)}$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5\,u_{n+1} - 4\,u_n$ est récurrente linéaire double. Puisque les solutions de l'équation caractéristique : $X^2 = 5\,X - 4$ sont 1 et 4, il eiste deux constantes α et β telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha 4^n + \beta$. Comme $u_0 = 1$ et $u_1 = 4$, on a le système : $\begin{cases} \alpha + \beta & = 1 \\ \alpha + 4\beta & = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha & = 0 \\ \beta & = 1 \end{cases}$.Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4^n}$

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1, u_1 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4\,u_{n+1} - 4\,u_n$ est récurrente linéaire double. Puisque l'équation caractéristique : $X^2 = 4\,X - 4$ a une solution double 2, il eiste deux constantes α et β telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha + n\,\beta)\,2^n$. Comme $u_0 = 1$ et $u_1 = 4$, on a le système : $\begin{cases} \alpha + 0\,\beta & = 1 \\ 2\,\alpha + 2\,\beta & = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha & = 1 \\ \beta & = 1 \end{cases}$.Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)\;2^n}$