Ex 1

1

Soit $C\in P(F)$. Soit $x\in f(\overset{-1}{f}(C))$. $\exists\, t\in \overset{-1}{f}(C) \mid x = f(t)$. Mais, puisque $t\in \overset{-1}{f}(C)$, $f(t)\in C$ ie $x\in C$. $\mathbf{f(\overset{-1}{f}(C))\subset C}$

2) Montrer l'équivalence : f est surjective $\Leftrightarrow \forall C\in P(F),\ f(\overset{-1}{f}(C)) = C$

(i) $\Rightarrow$ (ii) On suppose f surjective. Soit $C\in P(F)$. En utilisant le I)3)b), on a déjà $\mathbf{f(\overset{-1}{f}(C))\subset C}$

Soit alors $x\in C$. Puisque f est surjective, $\exists t\in E \mid x = f(t)$. Mais alors $x = f(t)\in C$ donc $t\in \overset{-1}{f}(C)$ et donc $x\in f(\overset{-1}{f}(C))$.

Ainsi : **f surjective $\Rightarrow \forall C\in P(F),\ f(\overset{-1}{f}(C)) = C$**

(ii) $\Rightarrow$ (i) On suppose : $\forall C\in P(F),\ f(\overset{-1}{f}(C)) = C$. Si on prend $C = F$, on a $F = f(\overset{-1}{f}(F))$ ie F est l'image par f d'une partie de E. Ainsi, tout élément de F est atteint par f depuis E ie f surjective. Ainsi : Ainsi : **$\forall C\in P(F),\ f(\overset{-1}{f}(C)) = C \Rightarrow$ f surjective**

3) Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes:
(i) f est injective **(ii)** $\forall (A,B)\in P(E)^2,\ f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$ **(iii)** $\forall A\in P(E),\ f(E\backslash A)\subset F\backslash f(A)$

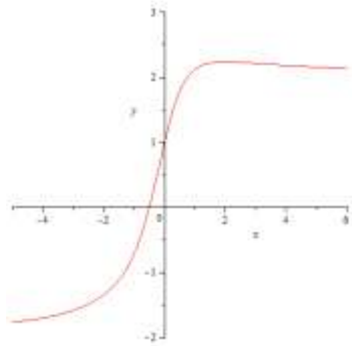
(i) $\Rightarrow$ (ii) On suppose f injective. Soit $(A,B)\in P(E)^2$. En utilisant le I)1)c), on a déjà $\mathbf{f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)}$
Soit alors $x\in f(A)\cap f(B)$. $\exists (t,s)\in A\times B \mid x = f(t) = f(s)$. Or f est injective donc $t = s$ ie $t\in A\cap B$ ie $x\in f(A\cap B)$
Ainsi : **f injective $\Rightarrow \forall (A,B)\in P(E)^2,\ f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$**

(ii) $\Rightarrow$ (iii) On suppose $\forall (A,B)\in P(E)^2,\ f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$. Soit $A\in P(E)$. On pose $B = E\backslash A$. D'après l'hypothèse (ii), on a : $f(A)\cap f(E\backslash A) = f(A\cap E\backslash A) = f(\varnothing) = \varnothing$. Ainsi $\mathbf{f(E\backslash A)\subset F\backslash f(A)}$

(iii) $\Rightarrow$ (i) On suppose $\forall A\in P(E),\ f(E\backslash A)\subset F\backslash f(A)$. Soit x et y deux éléments distincts de E. On pose $A = \{x\}$ et on a $\{y\}\subset E\backslash A$. D'après l'hypothèse (iii), on a : $f(\{y\}) = \{f(y)\}\subset f(E\backslash A)\subset F\backslash f(A) = F\backslash\{f(x)\}$. Ainsi $f(y)\neq f(x)$. Aussi **f est injective**

Ainsi : **f injective $\Leftrightarrow \forall (A,B)\in P(E)^2,\ f(A\cap B) = f(A)\cap f(B) \Leftrightarrow \forall A\in P(E),\ f(E\backslash A)\subset F\backslash f(A)$**

EXERCICE : Une relation d'équivalence



1) Etudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1+2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2-x}{\sqrt{1+x^2}^3}$. Donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 2]$ et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$.

D'autre part $f(2) = \sqrt{5}$ et, par croissance comparée, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$.

Ainsi, par continuité et stricte croissance de f sur l'intervalle $]-\infty, 2]$,
le théorème d'homéomorphisme permet d'affirmer que f réalise une bijection de $]-\infty, 2]$ vers $]-\infty, \sqrt{5}]$.
Ainsi, par continuité et stricte décroissance de f sur l'intervalle $[2, +\infty[$,
le théorème d'homéomorphisme permet d'affirmer que f réalise une bijection de $[2, +\infty[$ vers $]2, \sqrt{5}]$

2) On considère la relation $\mathfrak{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow (1+2x)\sqrt{1+y^2} = (1+2y)\sqrt{1+x^2}$ Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$

On commence par remarquer que : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\,\mathfrak{R}\,y \Leftrightarrow (1+2x)\sqrt{1+y^2} = (1+2y)\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Aussi :

- **$\mathfrak{R}$ est bien réflexive** car $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = f(x)$ donc $\forall x\in\mathbb{R},\ x\,\mathfrak{R}\,x$
- **$\mathfrak{R}$ est bien symétrique** car $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\,\mathfrak{R}\,y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = f(x) \Leftrightarrow y\,\mathfrak{R}\,x$
- **$\mathfrak{R}$ est bien transitive** car $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}z \Rightarrow f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x\mathfrak{R}z$

Donc $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence

3) Déterminer le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x pour cette relation selon les valeurs de $x\in\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$. Le nombre de solutions de l'équation $f(t) = f(x)$ d'inconnue t, dépend de la valeur de f(x).
D'abord on a nécessairement $-2 < f(x) \leq \sqrt{5}$.
Si $f(x) = \sqrt{5}$, alors l'équation $f(t) = f(x)$ n'a qu'une solution $t = x = 2$
Si $f(x) \leq 2$, alors l'équation $f(t) = f(x)$ n'a qu'une solution $t = x \leq \frac{3}{4}$

si $2 < f(x) < \sqrt{5}$, l'équation $f(t) = f(x)$ possède deux solutions, une dans $]\frac{3}{4}, 2[$ et une autre dans $]2, +\infty[$ et dont l'une est x.

Ainsi la classe de x possède 2 éléments si x est dans $]\frac{3}{4}, 2[\cup]2, +\infty[$, et un seul sinon

CORRECTION : Suite de zéros - $x^n + 16x^2 = 9$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par: $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ f_n(x) = x^n + 16x^2 - 9$.

1) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une solution strictement positive, notée u_n

La fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ car somme de fonctions croissantes dont au moins une (la fonction $x\to 16x^2$ est strictement croissante). De plus elle est continue car il s'agit d'n polynôme. Enfin, $f_n(0) = -9$ et la limite de f_n en $+\infty$ est $+\infty$.
Aussi par théorème d'homéomorphisme, f_n est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[-9, +\infty[$

En particulier, **l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution u_n dans $\mathbb{R}^+$, et cette solution n'est pas 0** car $f_n(0)\neq 0$

b) Calculer u_1 et u_2.

Les équations $f_1(x) = 0$ et $f_2(x) = 0$ sont 2 équations du second degré. On trouve alors : $u_0 = \mathbf{\frac{\sqrt{577}-1}{32}}$ **et** $\mathbf{u_1 = \frac{3\sqrt{17}}{17}}$

c) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n \in]0, \frac{3}{4}[$.

f_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $f_n(\frac{3}{4}) = \frac{3^n}{4^n} > 0 = f_n(u_n)$ donc $u_n < \frac{3}{4}$. Ainsi : **$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n \in]0, \frac{3}{4}[$.**

2) **a)** Montrer que: $\forall x \in]0,1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

$\forall x \in]0,1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} - x^n = x^n (x-1) < 0$ **Donc : $\forall x \in]0,1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$**

b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$f_n(u_{n+1}) = (u_{n+1})^n + 16\, u_n^2 - 9 = (u_n)^n (1 - u_n) > 0 = f_n(u_n)$. Donc puisque f_n croissante, on en déduit : $u_{n+1} > u_n$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note l sa limite.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{3}{4}$ donc elle converge. Sa limite ℓ étant entre 0 et $\frac{3}{4}$

3) **a)** Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Puisque : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $(u_n)^n = 9 - 16\, u_n^2$, on a **$(u_n)^n$ tend vers $9 - 16\,\ell^2$** lorsque n tend vers $+\infty$

Par ailleurs, puisque : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $0 \leqslant (u_n)^n \leqslant \frac{3^n}{4^n}$, on a également **$(u_n)^n$ tend vers 0** lorsque n tend vers $+\infty$

b) Donner enfin la limite l.

Par unicité de la limite, on a : $9 - 16\,\ell^2 = 0$ et **donc $\ell = \frac{3}{4}$**

EXERCICE : Une suite récurrente : $u_{n+1} = u_n/(u_n^2+u_n+1)$ – ESC 2000

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$.

1) Etudier les variations de f.

f'(x) est du signe de $x^2 - 1$. f possède 0 pour limite en $+\infty$ et en $-\infty$. f est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et son minimum vaut $f(-1) = -1$. Sur $[-1, 1]$, f est croissante et son maximum vaut $f(1) = \frac{1}{3}$. Enfin, f est décroissante sur $[1, +\infty[$

2) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que : $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$.

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p+1+\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p+1}$$

b) En déduire par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$

L'intervalle $]0,1]$ étant stable par f, on a directement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $0 < u_n$. L'autre partie de l'encadrement étant obtenu par récurrence en utilisant la relation précédente . Donc : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$**

c) En déduire la convergence et l'éventuelle limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Donc d'après le th des gendarmes, **la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0**

2) **a)** Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$.

On vérifie aisément la relation demandée : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$**

b) En déduire, par récurrence, que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Par récurrence, et en utilisant l'inégalité du 1) b), on en déduit : **$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$**

3) **a)** Justifier que $\forall k\in\mathbb{N}$, $k \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$

Soit $k \geq 2$. La fonction $x \to \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[k-1, k]$ donc est minorée par $\frac{1}{k}$. En intégrant sur $[k-1, k]$ on en déduit : **$\forall k\in\mathbb{N}$, $k \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}$**

b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$.

En sommant les inégalités précédentes, on a : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n)$

Donc en utilisant l'inégalité du 2b), on a **$\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$.**

c) Qu'en déduire quant à la convergence (et l'éventuelle limite) de la suite $(n.u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

On en déduit, avec le 2a), que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow n\,u_n \geq \frac{n}{n+2+\ln(n)}$ Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow \frac{n}{n+2+\ln(n)} \leq n\,u_n \leq \frac{n}{n+1}$

Aussi, d'après le th des gendarmes, **la suite $(n\,u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1**