Devoir surveillé N° 5 (4 heures)

Ce devoir est constitué d'un problème et de quatre exercices. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. La calculatrice est interdite. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

Probleme

Partie I : Etude de la fonction réciproque de la fonction th.

On notera respectivement ch, sh et th les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1. Montrer, en étudiant ses variations, que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser. On note argth la fonction "argument tangente hyperbolique" sa réciproque.
2. Exprimer la dérivée de th en fonction de th.
3. Démontrer que argth est impaire.
4. Démontrer que argth est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Exprimer argth à l'aide de fonctions usuelles.

Partie II : Etude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :
déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

1. Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
2. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
3. Montrer que, si f est solution, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$. (exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$.)
4. Montrer que si f est solution, $-f$ est aussi solution.
5. Montrer que th est solution du problème posé.

   Dans les questions **5.** à **9.**, on suppose que f **est une solution du problème posé, que** $f(0) = 1$ **et que** f **n'est pas constante.**

   On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)$.
6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.
7. Etablir une relation entre u_n et u_{n+1} ; en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0.
8. En utilisant les résultats des questions **5.** et **6.**, aboutir à une contradiction.
9. Que peut-on dire si l'hypothèse " $f(0) = 1$ " est remplacée par l'hypothèse " $f(0) = -1$ " ?

10. Conclusion ?

    Dans les questions **11.** à **14.**, on suppose que f **est une solution du problème posé et que** $f(0) = 0$.

11. En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que celle des questions **6.** à **10.**, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq -1 \quad \text{et} \quad f(x) \neq -1.$$
    On définit alors la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \operatorname{argth}(f(x))$.

12. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(2x) = 2\,g(x)$.

13. Montrer que g est dérivable en zéro.

14. Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\dfrac{x}{2^n}}$.

    Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

15. En déduire que g est linéaire.

16. Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

Exercice I : Dérivée nième

1. **Famille de polynômes**

   On définit, pour tout entier naturel n non nul, le polynôme P_n par :
   $\forall t \in \mathbb{R}, P_1(t) = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \qquad P_{n+1}(t) = t^3\,P_n'(t) + (2 - 3\,n\,t^2)\ P_n(t)$

   (a) Calculer P_2, P_3 et P_4

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(0) = 2^n$. Montrer que, pour $n \geqslant 1$, P_n est un polynôme de degré $(2n-2)$ et que le coefficient de son terme de plus haut degré vaut $(-1)^{n+1}\,(n+1)!$

2. **Etude d'une fonction**

   On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) & = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & = 0 \end{cases}$

   (a) Montrer que f est continue en 0.

   (b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ puis dresser le tableau de variations de f en indiquant ses limites aux bornes du domaine

   (c) Montrer que f est dérivable en 0 et que f' est continue en 0.

   (d) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f''(x) = \frac{P_2(x)}{x^6}\,e^{-\frac{1}{x^2}}$

   (e) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\,e^{-\frac{1}{x^2}}$

   (f) En déduire les limites de $f^{(n)}$ en $\pm\infty$

   (g) Déterminer la limite de $f^{(n)}$ en 0

   (h) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

   (i) Déterminer une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients polynomiaux satisfaites par f

   (j) En utilisant la formule de Leibniz, en déduire une relation liant $f^{(n+1)}$, $f^{(n)}$, $f^{(n-1)}$ et $f^{(n-2)}$ pour $n \geqslant 3$.

   (k) En déduire une relation de récurrence liant P_{n+1}, P_n, P_{n-1} et P_{n-2} pour $n \geqslant 3$.

<u>Exercice II</u> : Etude d'une fonction et d'une suite

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) & = x\,e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{2} \quad \text{si } x > 0 \\ f(0) & = \frac{1}{2} \end{cases}$

On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentant f.

Partie I : Etude de la fonction f

1. (a) Etudier la limite de f en $+\infty$.
   (b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$
2. Montrer que f est continue en 0, puis que f est continue sur $[0,+\infty[$.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ sur cet intervalle.
   (b) Montrer que f est dérivable en 0, puis que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$
   (c) Montrer qu'il existe un k à déterminer tel que f soit k-lipschitzienne sur $[0,+\infty[$.
   (d) Etudier les variations de f sur $[0,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f
   (e) Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie II : Etude d'une suite définie de manière implicite

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que l'équation $f(x) = \frac{n+1}{2n}$ d'inconnue x, admet une solution unique dans $[0,+\infty[$.
   On notera x_n cette solution
2. Donner $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ et construire x_1, x_2 et x_3 dans le graphe précédent.
3. Etudier le signe de $f(x_{n+1}) - f(x_n)$ et en déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite

Partie III : Etude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{3}$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

1. Soit la fonction h définie sur $[0,1]$ par $h(x) = f(x) - x$. Calculer h' sur $[0,1]$ et h'' sur $]0,1]$. En déduire les variations de h' puis celles de h.
2. Montrer : $\exists! \alpha \in [0,1] \,\big|\, f(\alpha) = \alpha$.
3. Ecrire un programme Python permettant d'obtenir une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.
5. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{e}\,|u_n - \alpha|$
6. Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

NOM PRENOM

Feuille à rendre avec le devoir