MPSI 14-15 Feuille n° 13 : Analyse asymptotique   Du 15/12/14 au 06/01/15

Exercice 1. Déterminer les limites des suites de termes généraux :

a) $\frac{2^n+n^{10}}{3^n-n^{100}}$ **b)** $n\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$ **c)** $\frac{\sin(n)}{n}$ **d)** $\frac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)\sin\left(\frac{5}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right)^2}$ **e)** $\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{2}{n}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$

f) $\frac{n^2+\ln(n^n)}{\sqrt{(\ln(n))^n}}$ **g)** $\left(\frac{\ln(1+n)}{\ln(n)}\right)^{n\ln(n)}$ **h)** $\left(\frac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n$ **i)** $\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$ **j)** $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

k) $2n+(-1)^n n^2\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ **l)** $\left(1+\frac{1}{2}\sin(n)\right)^{\frac{1}{n}}$ **m)** $\frac{n^n+n!}{(n+1)^n+n^n}$ **n)** $\sqrt[3]{\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^3}}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$

o) $\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ **p)** $\sqrt[n]{n^2}$ **q)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$ **r)** $\sqrt[n]{\lfloor a^n\rfloor}$ où $a>0$

Exercice 2. Déterminer un équivalent simple de u_n :

a) $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$ **b)** $u_n=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}$ **c)** $u_n=n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

d) $u_n=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right)$ **e)** $u_n=\ln(n+1)-\ln(n)$ **f)** $u_n=\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{n}\right)\right)^n$

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n\sim v_n$. A-t-on :

a) $e^{u_n}\sim e^{v_n}$ **b)** $(u_n)^n\sim(v_n)^n$ **c)** $\ln|u_n|\sim\ln|v_n|$ **d)** $\sin(u_n)^n\sim\sin(v_n)^n$

e) $\sqrt{u_n}\sim\sqrt{v_n}$ **f)** $(u_n)^{\frac{1}{n}}\sim(v_n)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n=\circ(v_n)$. A-t-on :

a) $e^{u_n}=\circ(e^{v_n})$ **b)** $(u_n)^n=\circ((v_n)^n)$ **c)** $\ln|u_n|=\circ(\ln|v_n|)$

d) $\sin(u_n)^n=\circ(\sin(v_n)^n)$ **e)** $\sqrt{u_n}=\circ\left(\sqrt{v_n}\right)$ **f)** $(u_n)^{\frac{1}{n}}=\circ\left((v_n)^{\frac{1}{n}}\right)$

Exercice 5. **a)** $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x-1}\times2^{\frac{1}{x(1-x)}}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan(x)}-e^{\sin(x)}}{\tan(x)-\sin(x)}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to0}\tan(x)\times e^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$

d) $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty}\frac{a^x+x^2}{2^x+(\ln|x|)^3}$

Exercice 6. **a)** $\displaystyle\lim_{x\to2^-}\frac{x-2}{\sqrt{2-x}}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^4+2x^2+3x}{2x^2-x}$ **d)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ **f)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ **g)** $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{\log_a x-\log_x a}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$ **i)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x-1-\sqrt{x^2-2x+2}\right)$

Exercice 7. **a)** $\displaystyle\lim_{x\to1}(2^x+3^x-5)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)^x-1}{x^x-x}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^{\left(\frac{1}{1+2\ln x}\right)}$ **e)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$ **f)** $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1+2\cos^3x-3\sqrt{\cos2x}}{\sin^4x}$

Exercice 8. Donner un DL aux points et ordres voulus :

a) $\frac{x^2}{\sin^2x}$ en 0 ordre 5 **b)** $(\operatorname{ch}x)^{(1+\sin x)}$ en 0 ordre 3 **c)** $e^{\cos x}$ en 0 ordre 7

d) $\sin x\ \operatorname{sh}^2x$ en 0 ordre 5 **e)** $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ en 0 ordre 4 **f)** $\frac{\ln x}{x^2}$ en 1 ordre 4

g) $\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ en $+\infty$ ordre 3 **h)** $e^x-\sqrt{1+2x}$ en 0 ordre 5

Exercice 9. En utilisant des DL, donner les positions relatives au voisinage de 0 des courbes de : $f_1(x) = e^{\sin x}$, $f_2(x) = e^{\frac{x}{\cos x}}$, $f_3(x) = 3 - 2\,(1 + x^3)\sqrt{1-x}$ et $f_4(x) = \frac{x}{\sin x} + x$

Exercice 10. Calculer un équivalent simple des expressions suivantes :

a) $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$ **b)** $\sqrt{x^2 + 2x + 3} - (ax + b)$ en $+\infty$ **c)** $\dfrac{1}{\cos x} - \tan x$ en $\frac{\pi}{2}$

d) $\dfrac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$ en $\frac{\pi}{2}$ **e)** $\dfrac{x^3 + 1 - \cos x}{(x^2 - 2x)\tan(3x)}$ en 0 **f)** $\dfrac{\tan x - \sin x}{e^x - \cos x}$ en 0

g) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ en $+\infty$ **h)** $\sqrt[4]{x^4 + 1} - x$ en $+\infty$ **i)** $\dfrac{\sin x - x\,\cos x}{e^{\cos x} - e}$ en 0

j) $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$ **k)** $\dfrac{\ln(\cos 3x)}{\sin^2(2x)}$ en 0 **i)** $\dfrac{(1 - e^x)\,\sin x}{x^2 + x^3}$ en 0

Exercice 11. Montrer que la fonctions $x \to (1+x)^{\frac{1}{x}}$ se prolonge par continuité en 0 et écrire son DL à l'ordre 3 en 0.

Exercice 12. **a)** DL_3 en 0 de $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$ **b)** DL_5 en $\frac{\pi}{6}$ de $\sin x$ **c)** DL_5 en 0 de $\sin^2 x$

d) DL_1 en 1 de $(1 + \ln x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ **e)** DL_2 (en $\frac{1}{x}$) en $+\infty$ de $\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

f) DLG_3 en 0 de $\dfrac{\ln(1 + \cos x)}{\tan x}$ **g)** DL_n en 0 de $\cos^3 x$

Exercice 13. Etudier les branches infinies de $x \to \dfrac{x^2}{x+4} \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2x+6}}$

Exercice 14.
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[\;\middle|\; |x_n \sin x_n| = 1$
2. Développement asymptotique de x_n à la précision $\frac{1}{n^2}$

Exercice 15.
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2, \exists! x_n \in]n+1, n+2[\;\middle|\; (x_n - n)\ln(n) = x_n \ln(x_n - n)$
2. Montrer que $x_n - n - 1 \sim \frac{\ln(n)}{n}$

Exercice 16. Comportement en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Exercice 17. Comportement en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{|4 - x^2|}$

Exercice 18. Comportement en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction définie par $f(x) = x^2 \arctan\left(\frac{1}{1-x}\right)$

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et, si $x \neq 0$, $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}$ Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Etudier les variations de f. Tracer son graphe en précisant la position relative du graphe et de la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 20.
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[\;\middle|\; \tan(x_n) = x_n$
2. Développement asymptotique de x_n à la précision $\frac{1}{n^2}$ quand n tend vers $+\infty$