CORRIGE

PARTIE I ***Première approximation de $\sqrt{2}$***

On définit la fonction f qui à tout réel x positif ou nul associe : $x^2 - 2$.
On notera C sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan, B son point d'intersection avec (Ox) et A le point de C d'abscisse a, où a désigne un réel strictement positif. On supposera de plus que les points A et B sont distincts.

1) Montrer qu'on peut définir par récurrence une suite (M_n) de points de C de la manière suivante :
* M_0 est un point quelconque de C distinct de A et de B.
* Pour tout n entier naturel, M_{n+1} est le point de C de même abscisse que le point d'intersection de l'axe (Ox) avec la droite (A M_n)
On notera u_n l'abscisse de M_n et u la suite de terme général u_n.
Montrer que l'on a, pour tout n entier naturel, la relation : $u_{n+1} = \dfrac{2 + a\,u_n}{a + u_n}$ et que M_{n+1} est distinct de A, de B et de M_n.

Soit P_n la propriété de récurrence : " M_n existe, c'est un point de C distinct de A et de B "

- P_0 vraie ? M_0 est un point de C distinct de A et de B donc **P_0 est vraie**
- Si P_n est vraie, P_{n+1} est-elle également vraie ? On a M_n point de C distinct de A et de B. La droite (AM_n) est alors bien définie et n'est ni parallèle à (Ox) (car M_n étant sur C n'a pas la même ordonnée que A) ni parallèle à (Oy). Donc (AM_n) coupe (Ox) en un point d'abscisse positive. Or A n'est pas dans (Ox) et la courbe C ne contient pas trois points alignés (l'équation $x^2 - 2 = \alpha\, x + \beta$ ne pouvant pas avoir trois solutions réelles). Aussi le point d'intersection de (AM_n) et (Ox), est d'abscisse différente de celle de A et de B. Aussi, en posant M_{n+1} le point de C de même abscisse que l'intersection de (Ox) avec (AM_n), M_{n+1} existe bien et est un point distinct de A et de B.On en déduit que **P_{n+1} est vraie**
- Ainsi on a montré que P_0 est vraie et que, si P_n vraie, P_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, P_n vraie i.e. **$\forall n\in\mathbb{N}$, M_n existe et est un point de C distinct de A et de B.**

En particulier la suite $\left(M_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie

Si on note u_n l'abscisse de M_n , l'équation de (AM_n) est : $Y - f(a) = (X - a)\dfrac{f(u_n) - f(a)}{u_n - a}$. Ainsi u_{n+1} étant l'abscisse du point de cette droite d'ordonnée nulle, on a : $u_{n+1} = a - f(a)\dfrac{u_n - a}{f(u_n) - f(a)}$. Or $f(u_n) = u_n^2 - 2$ et $f(a) = a^2 - 2$

D'où : $u_{n+1} = a - (a^2 - 2)\dfrac{u_n - a}{u_n^2 - a^2} = a - \dfrac{a^2 - 2}{u_n + a} = \dfrac{2 + a\,u_n}{a + u_n}$. D'où : $\mathbf{u_{n+1} = \dfrac{2 + a\,u_n}{a + u_n}}$

On a déjà montré que tous les points M_n étaient distincts de A et de B.
Par ailleurs u_{n+1} et u_n sont distincts sinon on aurait : $u_n = \dfrac{2 + a\,u_n}{a + u_n} \Leftrightarrow u_n^2 = 2 \Leftrightarrow u_n = \sqrt{2}$ ce qui est faux car M_n différent de B.

Ainsi M_{n+1} est distinct de A, de B et de M_n

2) a) Justifier, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{a - \sqrt{2}}{a + u_n}(u_n - \sqrt{2})$

$u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{2 + a\,u_n}{a + u_n} - \sqrt{2} = \dfrac{2 + a\,u_n - a\sqrt{2} - \sqrt{2}u_n}{a + u_n} = \dfrac{a - \sqrt{2}}{a + u_n}(u_n - \sqrt{2})$. D'où $\mathbf{u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{a - \sqrt{2}}{a + u_n}(u_n - \sqrt{2})}$

2) b) En déduire, pour tout entier naturel n : $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|1 - \dfrac{\sqrt{2}}{a}\right| \times \left|u_n - \sqrt{2}\right|$ puis que $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|1 - \dfrac{\sqrt{2}}{a}\right|^n \times \left|u_0 - \sqrt{2}\right|$

$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\dfrac{a - \sqrt{2}}{a + u_n}\right| \times \left|u_n - \sqrt{2}\right|$. Or a et u_n sont positifs, a étant non nul. Donc $\left|\dfrac{a - \sqrt{2}}{a + u_n}\right| = \dfrac{\left|1 - \dfrac{\sqrt{2}}{a}\right|}{1 + \dfrac{u_n}{a}} \leqslant \left|1 - \dfrac{\sqrt{2}}{a}\right|$

Ainsi : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|1 - \dfrac{\sqrt{2}}{a}\right| \times \left|u_n - \sqrt{2}\right|$**

Par récurrence immédiate, on en déduit : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|1 - \dfrac{\sqrt{2}}{a}\right|^n \times \left|u_0 - \sqrt{2}\right|$**

2) c) Comment peut-on choisir a pour pouvoir en déduire que la suite u converge ? **O**n précisera sa limite.

Si on choisit a de telle sorte que $\left|1 - \dfrac{\sqrt{2}}{a}\right|$ soit inférieur strictement à 1, alors la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est $\sqrt{2}$

Il suffit de prendre a $> \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$

3) Dans cette question on suppose : $a = 1$, $u_0 = 2$.

3) a) Montrer qu'on a, pour tout entier naturel n non nul : $\left| u_n - \sqrt{2} \right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ En déduire un rang n_0 à partir duquel u_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près. Justifier l'encadrement : $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| u_n - \sqrt{2} \right| \leqslant \left| 1 - \sqrt{2} \right|^n \times \left| 2 - \sqrt{2} \right|$. Or $\left| 1 - \sqrt{2} \right| \leqslant \frac{1}{2}$ car $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ et de même $\left| 2 - \sqrt{2} \right| \leqslant 1$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| u_n - \sqrt{2} \right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ On cherche n tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-3}$.

On a : $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow -n\ln(2) \leqslant -3\ln(10) \Leftrightarrow n \geqslant 3\frac{\ln(10)}{\ln(2)} = 9{,}96$ à 10^{-2} près

Ainsi, **en posant $n_0 = 10$, on a, pour tout $n \geqslant n_0$, u_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près**

Puisque $\left(\frac{1}{2}\right)^7 \leqslant 10^{-2}$, u_7 est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près . Or $u_7 = \frac{816}{577} = 1{,}414$ à 10^{-3} près par défaut.

Ainsi : $1{,}404 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}425$ et **en particulier $1{,}4 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}5$**

3) b) On veut préciser la rapidité de la convergence de la suite u. On considère la suite v définie pour tout entier naturel n par la relation : $v_n = \frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$

Montrer que c'est une suite géométrique. En déduire : $v_n = (-1)^n \left(\sqrt{2} - 1\right)^{2n+2}$ puis la majoration : $\left| u_n - \sqrt{2} \right| \leqslant 4 \times (0{,}2)^{n+1}$

v_n est bien défini car $u_n > 0$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{2}}{u_{n+1} + \sqrt{2}} = \frac{\frac{2+u_n}{1+u_n} - \sqrt{2}}{\frac{2+u_n}{1+u_n} + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2} + (1-\sqrt{2})\,u_n}{2 + \sqrt{2} + (1+\sqrt{2})\,u_n} = \frac{(1-\sqrt{2})(u_n - \sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(u_n + \sqrt{2})}$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} v_n$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ et de premier terme $v_0 = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$

On en déduit : **$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-1)^n \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+2}$**

Or : $u_n - \sqrt{2} = v_n \times (u_n + \sqrt{2})$ donc $\left| u_n - \sqrt{2} \right| \leqslant \left| v_n \right| \times \left| u_n + \sqrt{2} \right|$

Mais d'après 3)a), $\left| u_n + \sqrt{2} \right| \leqslant 2\sqrt{2} + 1 \leqslant 4$ et $\left| v_n \right| = (3 - 2\sqrt{2})^{n+1} \leqslant (0{,}2)^{n+1}$ car $1{,}4 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}5$

Ainsi : **$\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| u_n - \sqrt{2} \right| \leqslant 4 \times (0{,}2)^{n+1}$**

PARTIE II *La méthode de Newton (Algorithme de Babylone)*

On reprend la courbe C définie dans la partie précédente.

I) a) Montrer qu'il est possible de définir par récurrence une suite $a = (a_n)$ par les deux conditions :
*** a_0 est un réel strictement positif.**
*** a_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe (Ox) avec la tangente en P_n à C, P_n désignant le point de C d'abscisse a_n . Déterminer une relation entre a_{n+1} et a_n .**

Soit R_n la propriété de récurrence : " P_n existe, c'est un point de C d'abscisse strictement positive "

- R_0 vraie ? P_0 est un point de C d'abscisse strictement positive donc **R_0 est vraie**
- Si R_n est vraie, R_{n+1} est-elle également vraie ? On a P_n point de C d'abscisse strictement positive. La tangente en P_n à la courbe C est de pente strictement positive. Donc cette tangente coupe l'axe (Ox) en un point d'abscisse strictement positive car C est au dessus de ses tangentes. Donc P_{n+1} est un point de C d'abscisse strictement positive : d'où **R_{n+1} est vraie**
- Ainsi on a montré que R_0 est vraie et que, si R_n vraie, R_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, R_n vraie i.e. **$\forall n \in \mathbb{N}$, P_n existe et est un point de C d'abscisse strictement positive.**

En particulier la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie

Si a_n est l'abscisse de P_n, l'équation de la tangente en P_n est : $Y - f(a_n) = f'(a_n) \times (X - a_n)$.

D'où : $a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ car $f'(a_n) \neq 0$ D'où : $a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 - 2}{2a_n} = \frac{a_n^2+2}{2a_n} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$: **$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$**

I) b) On considère la fonction g définie, pour tout réel x strictement positif par : $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}^{+*}$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \frac{x^2-2}{2x^2}$ qui est du signe de $x - \sqrt{2}$. Ainsi g est décroissante sur $]0, \sqrt{2}[$ et croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$ et de plus, le minimum de g sur $\mathbb{R}_+^*$ est atteint en $\sqrt{2}$ et vaut $\sqrt{2}$.

I) c) Montrer que, pour n non nul, a_n est supérieur ou égal à $\sqrt{2}$.
En déduire que, à partir du rang 1, la suite a est décroissante et admet une limite réelle. Vérifier que cette limite est $\sqrt{2}$.

Pour tout n>0, $a_n = g(a_{n-1})$ avec $a_{n-1} > 0$ donc d'après l'étude de g, on a : **pour tout n>0, $a_n \geqslant \sqrt{2}$**

Soit n>0. On a : $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{a_n} - a_n\right) = \frac{2 - a_n^2}{2\,a_n} \leqslant 0$ car pour tout n>0, $a_n \geqslant \sqrt{2}$ Ainsi **la suite $\left(a_n\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante**

Cette suite $\left(a_n\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$, donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite $\left(a_n\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente. Sa limite ℓ vérifie $\ell \geqslant \sqrt{2}$ et $g(\ell) = \ell$ par continuité de g. Or l'équation $g(x) = x$ n'admet que $\sqrt{2}$ pour solution positive, donc $\ell = \sqrt{2}$. Ainsi **la suite $\left(a_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\sqrt{2}$**

2) On veut préciser la rapidité de la convergence de la suite *a*. Pour cela, on prend : $a_0 = 1{,}5$ et on considère la suite *b* définie par : $b_n = \frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}$

2) a) Justifier la relation : $b_{n+1} = b_n^2$, pour tout entier naturel *n*. **D**éterminer une expression de b_n en fonction de *n* et de b_0 .

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - \sqrt{2}}{a_{n+1} + \sqrt{2}} = \frac{a_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,a_n}{a_n^2 + 2 + 2\sqrt{2}\,a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{(a_n + \sqrt{2})^2} = b_n^2 : \ \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = b_n^2$$

Par récurrence immédiate, on en déduit : **$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = (b_0)^{2^n}$**

2) b) Vérifier : $b_0 \leq 0{,}04$

$b_0 = \frac{a_0 - \sqrt{2}}{a_0 + \sqrt{2}} = \frac{(a_0 - \sqrt{2})^2}{a_0^2 - 2}$. Or $a_0^2 - 2 = \frac{1}{4}$ et $|a_0 - \sqrt{2}| = |1{,}5 - \sqrt{2}| \leqslant 0{,}1$ donc $(a_0 - \sqrt{2})^2 \leqslant 0{,}01$ Ainsi **$b_0 \leq 0{,}04$**

2) c) En déduire l'encadrement : $0 \leqslant a_n - \sqrt{2} \leqslant 3 \times (0{,}04)^{2^n}$

On déduit des deux questions précédentes que, pour tout n, $b_n \leqslant (0{,}04)^{2^n}$

Or : $|a_n - \sqrt{2}| = |b_n| \times |a_n + \sqrt{2}|$ Or $\sqrt{2} \leqslant 1{,}5$ et $a_n \leqslant \sup(a_0, a_1) = 1{,}5$ car $\left(a_n\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, $a_0 = 1{,}5$ et $a_1 = \frac{17}{12}$

Donc : **$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n - \sqrt{2}| \leqslant 3 \times (0{,}04)^{2^n}$**

2) d) En déduire un rang n_1 à partir duquel a_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} prés.

On cherche n tel que $3 \times (0{,}04)^{2^n} \leqslant 10^{-10}$. On a :

$3 \times (0{,}04)^{2^n} \leqslant 10^{-10} \Leftrightarrow \ln 3 - 2^n \ln(250) \leqslant -10\ln(10) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1}{\ln(2)} \times \ln\left(\frac{10\ln(10) + \ln 3}{\ln(250)}\right)$: il suffit de prendre $n \geqslant n_1 = 3$

PARTIE III ***Un problème de point fixe.***

Dans cette partie, on se propose de généraliser certains résultats mis en évidence dans les parties précédentes. On considérera une fonction φ définie et de classe C^1 sur un intervalle réel $I = [a,b]$. On note *m* un réel tel que, pour tout *x* de I, on ait : $|\varphi'(x)| \leqslant m$ et on supposera que *m* est un réel strictement inférieur à 1.
Enfin, on supposera qu'il existe α élément de I vérifiant la condition : $\varphi(\alpha) = \alpha$
On se propose de trouver des valeurs approchées de α comme limite d'une suite et d'examiner la rapidité de la convergence de cette suite.

1) On définit par récurrence la suite *u* par les conditions : * u_0 est élément d'un intervalle centré en α et inclus dans I. * Pour tout *n* entier naturel : $u_{n+1} = \varphi(u_n)$
En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier naturel *n*, u_n est élément de I et justifier la relation, pour tout *n* entier naturel : $|u_n - \alpha| \leqslant m^n |u_0 - \alpha|$ **E**n déduire que la suite *u* converge vers α.

φ étant 1-lipschitzienne et $\varphi(\alpha) = \alpha$, on a : $\forall \varepsilon>0,\ \varphi([\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]) \subset [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$

Ainsi, en choisissant $\varepsilon>0$ tel que $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] = J \subset I$ et $u_0 \in J$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in J$

Or, en appliquant l'inégalité des accroissements finis, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\varphi(u_n) - \varphi(\alpha)| \leqslant m\,|u_n - \alpha|$ donc $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant m\,|u_n - \alpha|$

Aussi, par récurrence immédiate, on en déduit : **$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant m^n |u_0 - \alpha|$**

Puisque $|m| < 1$, m^n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et **donc $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α**

2) On suppose désormais que φ est de classe C^2 sur I et que *K* est un réel tel que, pour tout *x* de I on ait : $|\varphi''(x)| \leqslant K$. Dans cette question, ou fera de plus les hypothèses supplémentaires suivantes: $\varphi'(\alpha) = 0$ et $\varphi''(\alpha) \neq 0$

2) a) On suppose la formule de Taylor-Lagrange affirmant : $\forall t \in I, \exists \theta \in]0,1[\ \mid \varphi(t) = \varphi(\alpha) + (t - \alpha)\varphi'(\alpha) + \frac{(t-\alpha)^2}{2}\varphi''(\alpha + \theta(t - \alpha))$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leqslant \frac{K}{2}(u_n - \alpha)^2$ puis, $\forall n \in \mathbb{N} : \left|u_n - \alpha\right| \leqslant \left(\frac{K}{2}\right)^{2^n - 1} (u_0 - \alpha)^{2^n}$

On a : $\forall t \in I,\ |\varphi(t) - \varphi(\alpha)| \leqslant \frac{K}{2}(t - \alpha)^2$. En particulier : **$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|u_{n+1} - \alpha\right| \leqslant \frac{K}{2}(u_n - \alpha)^2$**

Par récurrence "immédiate", on en déduit : **$\forall n \in \mathbb{N} : \left|u_n - \alpha\right| \leqslant \left(\frac{K}{2}\right)^{2^n - 1} (u_0 - \alpha)^{2^n}$**

2) b) En déduire que l'on peut choisir u_0 de manière à ce qu'il existe un réel strictement positif A et un réel q strictement compris entre 0 et 1 tel que :

$\left| u_n - \alpha \right| \leqslant A\, q^{2^n}$

On pose $q = \frac{K}{2}\,|u_0 - \alpha|$. On peut choisir u_0 de telle sorte que l'on ait $|q| < 1$. On pose $A = \frac{2}{K}$

$\forall n \in \mathbb{N} : \left| u_n - \alpha \right| \leqslant A\, q^{2^n}$

2) c) Application : **E**n utilisant l'approximation de $\sqrt{2}$ trouvée dans la partie I.3) a) et en appliquant les résultats précédents à la fonction g définie dans la partie II, donner un indice n_2 à partir duquel a_n est une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.

On travaille avec la fonction g de la partie précédente. On a $g'(\sqrt{2}) = 0$, $g''(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$

Sur [1,4 ; 1,5], $|g''|$ est majorée par $K = 0,75$.
Si on prend $u_0 = 1,5$, on a $q = 0,0375$ et $A = 2,67 < 3$

Avec $n_2 = 3$, on a pour tout $n \geqslant n_2$, $Aq^{2^n} \leqslant 1,2 \cdot 10^{-11} \leqslant 10^{-10}$ Donc pour a_3 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près
Or on a : $a_0 = \frac{3}{2} = 1,5$, $a_1 = \frac{17}{12} = 1,416667$ à 10^{-6} près , $a_2 = \frac{577}{4082} = 1,414215$ à 10^{-6} près

et enfin $a_3 = \frac{665857}{470832} = 1,4142135623$ à 10^{-10} près