Devoir surveillé N° 6 (2 heures)

Ce devoir est constitué d'un problème et de deux exercices. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. La calculatrice est interdite. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

Exercice I : Étude partielle d'une fonction

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$

1. Domaine de définition de f. f est-elle dérivable sur ce domaine de définition ?
2. Déterminer un DL à l'ordre 4 en 0 de f. Qu'en déduit-on quant au graphe de f ?
3. Le graphe de f possède-t-il une asymptote en $+\infty$? Le cas échéant, déterminer la position relative locale au voisinage de $+\infty$ du graphe et de son asymptote.
4. Le graphe de f possède-t-il une asymptote en $-\infty$? Le cas échéant, déterminer la position relative locale au voisinage de $-\infty$ du graphe et de son asymptote.

   On admet que la dérivée de f s'annule (et change de signe) en un unique point α tel que $\alpha = 0.14$ à 10^{-2} près et que $f(\alpha) = 0.48$ à 10^{-2} près.
5. Avec les éléments fournis par vos calculs précédents et le résultat admis ci-dessus, dresser le tableau de variation de f et donner l'allure du graphe de la fonction f.

Exercice II : Etude d'une suite définie de façon implicite

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x^5 + n\,x - 1$

1. Montrer que f_n possède une unique racine que l'on note x_n. Déterminer la partie entière de x_n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$. En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite ℓ.
4. En comparant x_n et $\dfrac{1}{n}$, montrer que la suite $(n\,x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
5. En utilisant la relation satisfaite par x_n, montrer que $(n\,x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
6. Déterminer un équivalent simple de $x_n - \dfrac{1}{n}$

Probleme

Partie I : Somme de deux sous-groupes.

On considère un groupe $(G, \top)$ et H et K deux sous-groupes de $(G, \top)$. On note :
$H \top K = \left\{ z \in G \,\middle|\, \exists (x,y) \in H \times K ; z = x \top y \right\}$ et $K \top H = \left\{ z \in G \,\middle|\, \exists (x,y) \in K \times H ; z = x \top y \right\}$

1. Montrer que, si $z \in H \top K$, alors son symétrique z^{-1} par $\top$ est dans $K \top H$
2. En déduire que, si $H \top K$ est un sous-groupe de $(G, \top)$, alors $H \top K = K \top H$
3. Montrer que $H \top K$ est un sous-groupe de $(G, \top)$ si et seulement si $H \top K = K \top H$

Partie II : Sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$

Le but de cette partie est de déterminer les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $n\,\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, \exists k \in \mathbb{Z};\ x = nk\}$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n\,\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$
2. Soit $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que : $n\,\mathbb{Z} = p\,\mathbb{Z} \iff n = \pm\, p$

   On va montrer que tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont de la forme $n\,\mathbb{Z}$.
   Pour cela on considère H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ et $A = H \cap \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que si H est réduit à $\{0_\mathbb{Z}\}$, il est bien de la forme proposé.
   Par la suite, on considère que H n'est pas réduit à $\{0_\mathbb{Z}\}$
4. Montrer que A n'est pas vide
5. Montrer que A possède un plus petit élément. On note b ce plus petit élément.
6. Montrer que $b\,\mathbb{Z} \subset H$
7. Soit $a \in H$. Soit r le reste de la division euclidienne de a par b. Montrer que $r \in H$ puis que $r = 0$
8. En déduire $H = b\,\mathbb{Z}$

Partie III : Définitions algèbriques du pgcd et du ppcm

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$

1. En utilisant les résultats des deux premières parties, montrer que :
   $\exists\,(d,p) \in \mathbb{N}^2 \,|\, a\,\mathbb{Z} \bigcap b\,\mathbb{Z} = p\,\mathbb{Z}$ et $a\,\mathbb{Z} + b\,\mathbb{Z} = d\,\mathbb{Z}$
2. En utilisant des résultats d'arithmétique, montrer que $d = a \wedge b$ et $p = a \vee b$

CORRECTION

Exercice I : Étude partielle d'une fonction

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$

1. Comme $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2>0, 1+4x^2>0$ et $-x \leqslant |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2}$ donc $1+x+\sqrt{1+x^2}>0$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$. Plus précisément, comme toutes les fonctions apparaissant dans l'expression de f sont dérivables sur leur ensemble de définition sauf la fonction $\sqrt{.}$ qui n'est pas dérivable en 0 (mais ce cas n'est pas effectif dans f car les arguments de $\sqrt{.}$ sont strictement positifs), $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.

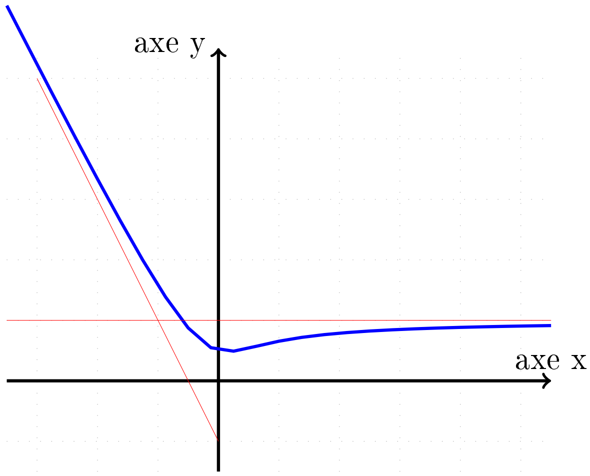
2. On a :$1+x+\sqrt{1+x^2} = 2+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\circ(x^4) = 2\times\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{16}x^4+\circ(x^4)\right)$. Donc :
$\dfrac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^3+\circ(x^4)\right)$.
Ainsi : $f(x) = \dfrac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^3+\circ(x^4)\right)\times(1+2x^2-2x^4+\circ(x^4))$. Donc en développant :
$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+x^2-\frac{7}{16}x^3-x^4+\circ(x^4)}$$
On en déduit que $\boxed{\textbf{le graphe de } f \textbf{ possède la droite d'équation } Y=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}X \textbf{ pour tangente}}$, la courbe étant au-dessus.

3. On pose $t=\dfrac{1}{x}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, t tend vers 0 par valeurs positives. On a :
$f(x) = f\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{\sqrt{4+t^2}}{1+t+\sqrt{1+t^2}}$. Or $\sqrt{4+t^2} = 2+\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{1}{64}t^4+\circ(t^4)$. D'où :
$f\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{2}t+\circ(t^2)\right)\times\left(2+\dfrac{1}{4}t^2+\circ(t^2)\right) = 1-\frac{1}{2}t+\dfrac{1}{8}t^2+\circ(t^2)$ et donc
$\boxed{f(x) = 1-\frac{1}{2x}+\dfrac{1}{8x^2}+\circ\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}$:
$\boxed{\textbf{le graphe de } f \textbf{ possède la droite d'équation } Y=1 \textbf{ pour asymptote en } +\infty}$, la courbe étant en dessous

4. On pose $t=\dfrac{1}{x}$. Lorsque x tend vers $-\infty$, t tend vers 0 par valeurs négatives. On a :
$f(x) = f\left(\dfrac{1}{t}\right) = -\dfrac{\sqrt{4+t^2}}{1+t-\sqrt{1+t^2}}$ Or $\sqrt{4+t^2} = 2+\dfrac{1}{4}t^2+\circ(t^3)$ et $1+t-\sqrt{1+t^2} = t\times\left(1-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{8}t^3+\circ(t^3)\right)$. D'où :
$f\left(\dfrac{1}{t}\right) = -\dfrac{1}{t}\times\left(2+\dfrac{1}{4}t^2+\circ(t^2)\right)\times\left(1+\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{4}t^2+\circ(t^2)\right) = -\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{3}{4}t+\circ(t)$ et donc
$\boxed{f(x) = -2x-1-\dfrac{3}{4x}+\circ\left(\dfrac{1}{x}\right)}$:
$\boxed{\textbf{le graphe de } f \textbf{ possède la droite d'équation } Y=-2X-1 \textbf{ pour asymptote en } -\infty}$, la courbe étant en dessous.
On admet que la dérivée de f s'annule (et change de signe) en un unique point α tel que $\alpha = 0.14$ à 10^{-2} près et que $f(\alpha) = 0.48$ à 10^{-2} près.

5. Avec les éléments fournis par vos calculs précédents et le résultat admis ci-dessus, dresser le tableau de variation de f et donner l'allure du graphe de la fonction f.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$			$-$		0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	1



Exercice II : Etude d'une suite définie de façon implicite

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^5 + n\,x - 1$

1. f_n est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ comme somme de fonctions qui sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et croissantes, dont au moins une est strictement croissante. Or $f_n(0) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, donc, par théorême d'homéomorphisme, $\boxed{\textbf{$f_n$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[-1, +\infty[$}}$. En particulier, $\boxed{\exists! x_n \in \mathbb{R}^+ \,|\, f_n(x_n) = 0}$.
   Comme $f_n(0) = -1 < f_n(x_n) < \dfrac{1}{n^5} = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et que f_n est croissante, on a $\boxed{0 < x_n < \dfrac{1}{n}}$ et la partie entière de x_n est donc 0.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $f_{n+1}(x_n) = x_n > 0$. Donc comme f_{n+1} est croissante, on en déduit : $x_{n+1} < x_n$: $\boxed{\textbf{La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante}}$
3. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. De plus l'encadrement trouvée à la première question donne $\boxed{\textbf{$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 0$}}$.
4. $0 < x_n < \dfrac{1}{n}$, donc $\boxed{\textbf{la suite $(n\,x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est comprise entre 0 et 1}}$.
5. On pose $y_n = n \times x_n$. On a $1 - y_n = \dfrac{y_n}{n^5}$. Or $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc $1 - y_n$ tend vers 0 i.e. $\boxed{\textbf{$(n\,x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1}}$.
6. On pose $z_n = y_n - 1 = nx_n - 1$. On a : $\dfrac{1}{n^5}(1 + z_n)^5 + z_n = 0$. Or z_n tend vers 0, donc on en déduit $z_n \sim \dfrac{-1}{n^5}$. Ainsi $\boxed{x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^5} + \circ\left(\dfrac{1}{n^5}\right)}$

Probleme

Partie I : Somme de deux sous-groupes.

Soit H et K deux sous-groupes du groupe $(G, \top)$. On note : $H\top K = \left\{z \in G \,\middle|\, \exists (x, y) \in H \times K; z = x\top y\right\}$

1. Soit $z \in H\top K$. On peut donc l'écrire sous la forme $z = x\top y$ avec $(x, y) \in H \times K$. Mais alors le symétrique de z vaut $z^{-1} = y^{-1}\top x^{-1}$ Donc $\boxed{z^{-1} \in K\top H}$
2. On suppose que $H\top K$ est un sous-groupe de $(G, \top)$. Procédons par double inclusion.
   Soit $z \in H\top K$. Comme $H\top K$ est stable par passage au symétrique, on a z^{-1} dans $H\top K$. Mais alors, d'après la question précédente, le symétrique de z^{-1} est dans $K\top H$ i.e $z \in K\top H$
   Soit $z \in K\top H$. On peut l'écrire sous la forme $z = x\top y$ avec x dans K et y dans H. Le symétrique de z est $z^{-1} = y^{-1}\top x^{-1} \in H\top K$. Mais comme $H\top K$ est stable par passage au symétrique, le symétrique de $y^{-1}\top x^{-1}$ est aussi dans $H\top K$ et donc $z \in H\top K$.
   Par double inclusion, on a établi $\boxed{H\top K = K\top H}$.
3. La question précédente fournit un sens de l'équivalence demandée. Étudions la réciproque.
   Supposons que $H\top K = K\top H$.
   ☞ $H\top K$ est une partie non vide de G car contient e_G
   ☞ Soit $z \in H\top K$. Son symétrique est dans $K\top H$ donc dans $H\top K$: $H\top K$ est stable par passage au symétrique
   ☞ Soit z et z' dans $H\top K$. On écrit ces éléments de G sous la forme : $z = x\top y$ et $z' = x'\top y'$ avec x et x' dans H et y et y' dans K. Par associativité, $z\top z' = x\top(y\top x')\top y'$. Mais $y\top x' \in K\top H = H\top K$. Donc il existe $x'' \in H$ et $y'' \in K$ tels que $y\top x' = x''\top y''$. Mais alors : $z\top z' = (x\top x'')\top(y''\top y') \in H\top K$: $H\top K$ est stable par $\top$.
   Ainsi, par caractérisation des sous groupes, $H\top K$ est un sous-groupe de G.
   Par double implication, on a donc montré
   $\boxed{H\top K \text{ est un sous-groupe de } (G, \top) \text{ si et seulement si } H\top K = K\top H}$

Partie II : Sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$

Le but de cette partie est de déterminer les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $n\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, \exists k \in \mathbb{Z};\ x = nk\}$

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. $n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des multiples de n donc c'est une partie non vide de $\mathbb{Z}$ stable par soustraction donc $\boxed{n\mathbb{Z} \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{Z}, +)}$
2. Soit $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $n\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Alors n et p ont les mêmes multiples donc ils sont associés donc $n = \pm p$
   Réciproquement, si $n = \pm p$ alors n et p ont les mêmes multiples donc $n\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$
   Ainsi $\boxed{n\mathbb{Z} = p\mathbb{Z} \iff n = \pm p}$ Pour cela on considère H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ et $A = H \cap \mathbb{N}^*$.
3. Si H est réduit à $\{0_\mathbb{Z}\}$, alors $\boxed{H = 0\mathbb{Z}}$
   Par la suite, on considère que H n'est pas réduit à $\{0_\mathbb{Z}\}$
4. H possdede un entier non nul. Donc il contient aussi l'opposé de cet entier non nul. Parmi ces deux entiers, un des deux est strictement positif donc il est dans A. Ainsi $\boxed{A \text{ n'est pas vide}}$
5. A est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ donc il possède un plus petit élément b.
6. $b \in H$. omme H est stable par addition et passage à l'opposé, on peut montrer la rćurrence immédiate : $\forall k \in \mathbb{N}, k\,b \in H$ et $-k\,b \in H$. En particulier $\boxed{b\mathbb{Z} \subset H}$
7. Soit $a \in H$. Soit r et q les reste et quotient de la division euclidienne de a par b. On a $r = a - bq$. Or a est dans H et $b\,q$ est dans $b\mathbb{Z}$ donc dans H. Mais H est stable par soustraction, donc $\boxed{r \in H}$.
   On a $r < b$ et b est le plus petit élément de A donc r n'est pas dans $A = H \cap \mathbb{N}^*$. Or r est dans H. Donc $r \notin \mathbb{N}^*$ i.e $r \leqslant 0$. Mais, comme r est le reste d'une division euclidienne, on a $r \geqslant 0$. Ainsi $\boxed{r = 0}$

8. On déduit de ce résultat que tout élément $a \in H$ s'écrit sousl la forme $a = bq$ avec $q \in \mathbb{Z}$ Donc $a \in H$. Aussi on en déduit : $H \subset b\,\mathbb{Z}$. Par double inclusion, on en déduit $\boxed{H = b\,\mathbb{Z}}$

Partie III : Définitions algèbriques du pgcd et du ppcm

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$

1. L'intersection de sous-groupes est un sous-groupe (cf. exercice fait en classe). Or $a\,\mathbb{Z}$ et $b\,\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$. Ainsi $a\,\mathbb{Z} \bigcap b\,\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Or on a montré qu'il existe alors un entier naturel p tel que ce sous-groupe soit de la forme $p\,\mathbb{Z}$.
   De même, comme l'addition est commutative, $a\,\mathbb{Z}+b\,\mathbb{Z} = b\,\mathbb{Z}+a\,\mathbb{Z}$ donc $a\,\mathbb{Z}+b\,\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Ainsi, il existe $d \in \mathbb{N} \,|\, a\,\mathbb{Z} + b\,\mathbb{Z} = d\,\mathbb{Z}$
2. p est le plus petit entier strictement positif de $p\,\mathbb{Z}$ donc p est le plus petit entier strictement positif commun à a et à b. Donc $\boxed{a\,\mathbb{Z} \bigcap b\,\mathbb{Z} = (a \vee b)\,\mathbb{Z}}$
   Tous les éléments de $a\,\mathbb{Z} + b\,\mathbb{Z}$ sont somme d'un multiple de a et d'un multiple de b donc sont des multiples de $a \wedge b$. En particulier d est un multiple de $a \wedge b$. Mais d'après la relation de Bezout, $a \wedge b$ s'écrit comme somme d'un multiple de a et d'un multiple de b donc $a \wedge b \in d\,\mathbb{Z}$: $a \wedge b$ est un multiple de d. Ainsi d et $a \wedge b$ sont associés donc comme ils sont positifs, on a : $\boxed{d = a \wedge b \textbf{ et } p = a \vee b}$