Devoir surveillé N° 7 (4 heures)

Ce devoir est constitué de deux problèmes. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. La calculatrice est interdite. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

PROBLEME I

Partie I

On considère les suites $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(v_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ définies par : pour tout entier naturel p,
$u_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}$ et, si $p > 1$, $v_p = u_p + \dfrac{1}{p}$

1. (a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, e = u_p + \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} e^t \, dt$
   (b) En déduire : $\forall p \in \mathbb{N}^*, |u_p - e| \leqslant \dfrac{e}{p!}$
   (c) En déduire que les suites $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(v_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers e.
2. On veut montrer que e est irrationnel. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'un couple $(m,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que : $e = \dfrac{m}{q}$
   (a) Montrer que : $q\,(q!)\,u_q$ et $q\,(q!)\,v_q$ sont deux entiers consécutifs.
   (b) Montrer, d'autre part, que : $q\,(q!)\,(e - u_q) \in [0,1]$ puis que $q\,(q!)\,(e - u_q) \in \,]0,1[$
   (c) Aboutir à une contradiction

Partie II

Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2 y' = (2-x)\,y$.

On note I l'intervalle $]-\infty, 1[$.

1. Calculer une primitive A de la fonction a définie sur I par : $a(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$.
2. Intégrer (E) sur I.

   Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}\, e^{\frac{1}{1-x}}$.
3. Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.

Partie III

1. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :

$$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right) e^{\frac{1}{1-x}} \text{ pour tout réel } x \text{ appartenant à } I.$$

   La démonstration permet d'exprimer $P_{n+1}(X)$ en fonction de $P_n(X)$, $P_n'(X)$ et X. Expliciter cette relation.

2. Préciser P_0, P_1, P_2 et P_3.
3. En dérivant n fois les deux membres de l'équation (E), prouver que pour tout entier positif n :

$$P_{n+1}(X) = \left[(2n+1)X + X^2\right] P_n(X) - n^2 X^2 P_{n-1}(X)$$

4. Déterminer les degré, coefficient dominant et coefficient constant de P_n.

Partie IV

Le but de cette partie est d'établir quelques propriétés des nombres $a_n = f^{(n)}(0)$.

1. Pour tout entier positif n, exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_n et a_{n-1}.
2. (a) Préciser, sans nouveau calcul : a_0, a_1, a_2, a_3. En déduire a_4.
   (b) Préciser le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4.
3. On reprend la suite de la première partie $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par $u_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}$.

   Si p et n sont des entiers naturels quelconques, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$$

4. (a) Exprimer $S_p(0)$ et $S_p(1)$ à l'aide de u_p et u_{p-1} pour $p \geqslant 1$.
   (b) Prouver que les suites $(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent et préciser leur limite en fonction de e.
5. Prouver que quels que soient les entiers p et n supérieurs ou égaux à 1 :

$$S_p(n+1) - (2n+2) S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)$$

6. En déduire que pour tout entier naturel n, la suite $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ converge.
7. Prouver que : $a_n = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} = \lim\limits_{p\to+\infty} n! \sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{n} . \frac{1}{i!}$

PROBLEME II : Somme des carrés des inverses des entiers

Dans ce problème, pour une fonction f et un entier naturel k, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de la fonction f avec : $f^{(0)} = f$.
Remarque : sauf s'il est précisé entier naturel, un entier peut être positif ou négatif.

Partie A : Convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\right)_{n \geqslant 1}$

Dans cette partie, p et n sont deux entiers naturels non nuls et on pose $S_n(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, $\frac{1}{(k+1)^p} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\, dx \leqslant \frac{1}{k^p}$.
2. Montrer que pour $n \geqslant 2$, $S_n(p) - 1 \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^p}\, dx \leqslant S_{n-1}(p)$.
3. Démontrer, par un calcul d'intégrales, que $\int_1^x \frac{1}{t^p}\, dt$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si $p \geqslant 2$.
4. Montrer que la suite $(S_n(p))_{n \geqslant 1}$ converge si et seulement si $p \geqslant 2$.

On note alors $\zeta(p) = \lim_{n \to +\infty} S_n(p)$.

Partie B : Calcul de $\zeta(2)$

Dans cette partie, on veut trouver un encadrement de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour en déduire une expression de $\zeta(2)$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considìrere le polynôme P_n défini par : $P_n = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right)$
   (a) Déterminer le degré de P_n
   (b) Montrer que l'on a : $P_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{2n-2p} \qquad (R_1)$
   (c) Sans utiliser (R_1), déterminer les zéros de P_n et montrer qu'ils sont tous réels et que l'on peut les écrire à l'aide de la fonction tan
   (d) En déduire que l'on peut écrire : $P_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) \qquad (R_2)$
   où cotan est l'inverse de la fonction tan lorsque c'est possible.
   (e) En comparant les coefficients en X^{2n-2} dans les relations (R_1) et (R_2), montrer
   $$\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$$
   (f) En déduire que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$
2. (a) Montrer que : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$
   (b) En déduire un encadrement de $\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$ lorsque $1 \leqslant k \leqslant n$
   (c) En déduire $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$

Partie C : $\zeta(2)$ est irrationnel

Dans cette partie, pour n entier naturel non nul et x réel, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n\,(1-x)^n}{n\,!}$.

1. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

   (a) Montrer qu'il existe $n+1$ entiers $e_n, e_{n+1}, ..., e_{2n}$ tels que $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} e_i\,x^i$.

   (b) Montrer que pour tout entier naturel k, $f_n^{(k)}(0)$ et $f_n^{(k)}(1)$ sont des entiers.
   (On pourra remarquer que $f_n(x) = f_n(1-x)$).

> On veut montrer que π^2 est un irrationnel, et on va raisonner par l'absurde :
>
> on suppose que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls.

2. On pose, pour n entier naturel non nul et x réel :

$$F_n(x) = b^n(\pi^{2n}\,f_n(x) - \pi^{2n-2}\,f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4}\,f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n\,f_n^{(2n)}(x)).$$

   (a) Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

   (b) On pose, pour n entier naturel non nul et x réel :

$$g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi\,F_n(x)\cos(\pi x), \quad \text{et} \quad A_n = \pi\int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

   Montrer que, pour n entier naturel non nul et x réel : $g_n'(x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x)$, et montrer que A_n est un entier.

3. On pose, toujours pour le même entier a, $u_n = \dfrac{a^n}{n\,!}$.

   (a) En considérant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   (b) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\dfrac{a^n}{n\,!} < \dfrac{1}{2}$.

   (c) Montrer que pour tout réel $x \in [0,1]$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n\,!}$.

   (d) Montrer alors que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $A_n \in]0,1[$, et conclure que π^2 est irrationnel.

   (e) Comment peut-on déduire de ce qui vient d'être fait que π est irrationnel ?

Pour information

Il a été prouvé depuis le 18-ième siècle, que $\zeta(p)$ est irrationnel pour tout entier pair $p \geqslant 2$, récemment (1979) il vient d'être découvert que $\zeta(3)$ est irrationnel et le mystère demeure encore quant à l'irrationnalité des $\zeta(p)$ pour les entiers impairs $p \geqslant 3$ ...

CORRECTION

PROBLEME I

Partie I

Soit $u_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}$ et $v_p = u_p + \frac{1}{p.p!}$

1. (a) On note : $w_p = u_p + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} e^t\, dt$. En intégrant par parties, on a :
$\int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} e^t\, dt = \frac{1}{(p+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{p+1}}{(p+1)!} e^t\, dt$.
Ainsi la suite $(w_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est constante et donc : $\forall p \in \mathbb{N}, w_p = w_0 = e$.
Ainsi $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, e = u_p + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} e^t\, dt}$

(b) $|u_p - e| = \left| \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} e^t\, dt \right| \leqslant \int_0^1 \frac{1}{p!} e^1\, dt = \frac{e}{p!}$. Ainsi : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, |u_p - e| \leqslant \frac{e}{p!}}$

(c) Par le théorême des gendarmes, on en déduit que $\boxed{(u_p)_{p\in\mathbb{N}} \textbf{ converge vers } e}$.
Comme $\frac{1}{p.p!}$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$, on a aussi $\boxed{(v_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \textbf{ converge vers } e}$.

2. On veut montrer que e est irrationnel. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'un couple $(m, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que : $e = \frac{m}{q}$

(a) $q\,(q!)\,u_q = q \times \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = q \times \sum_{k=0}^{q} ((q-k)!) \binom{q}{k}$ Donc $q.q!u_q$ est un entier.
De plus : $q\,(q!)\,v_q - q\,(q!)\,u_q = q\,(q!)\,(v_q - u_q) = 1$.
Ainsi $\boxed{q\,(q!)\,u_q \textbf{ et } q\,(q!)\,v_q \textbf{ sont deux entiers consécutifs}}$.

(b) On montre aisément que $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et que $(v_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. Ainsi, comme elles convergent vers e, on a :
$u_q < e < v_q$ et donc $0 < (e - u_q) < (v_q - u_q) = \frac{1}{q.q!}$ i.e. $0 < q\,(q!)\,(e - u_q) < 1$.
Donc $\boxed{q\,(q!)\,(e - u_q) \in \left]0, 1\right[}$

(c) On a $q\,(q!)\,(e - u_q) = q\,q!e - q\,q!u_q = m\,q! - q\,q!u_q \in \mathbb{Z} \bigcap \left]0, 1\right[= \varnothing$ Contradiction. Ainsi $\boxed{e \textbf{ est irrationnel}}$

Partie II

Soit (E) l'équation différentielle : $(1-x)^2\, y' = (2-x)\, y$.

On note I l'intervalle $\left]-\infty, 1\right[$.

1. On remarque que $a(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$, ce qui définit une fonction continue sur I, et l'existence de primitives de a sur I est ainsi assurée. Une primitive de a sur I est alors par exemple A définit sur I par $\boxed{A(x) = -\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}.}$

2. L'équation (E) est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre; le coefficient devant y' ne s'annule pas sur I, on en déduit que les solutions de (E) sur I sont les fonctions définies sur I par $x \longmapsto \lambda e^{A(x)}$ où λ est un réel quelconque. Les solutions de (E) sur I sont donc les fonctions définies sur I par $\boxed{x \longmapsto \frac{\lambda}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}.}$

3. f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, elle admet un développement limité à tout ordre en 0 ; de plus,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}} &= \left(1+x+x^2+x^3+o\left(x^3\right)\right)e.e^{x+x^2+x^3+o\left(x^3\right)}\\ &= e\left(1+x+x^2+x^3+o\left(x^3\right)\right)\left(1+\left(x+x^2+x^3\right)+\frac{1}{2}\left(x+x^2\right)^2+\frac{1}{6}\left(x\right)^3+o\left(x^3\right)\right)\\ &= e\left(1+x+x^2+x^3+o\left(x^3\right)\right)\left(1+x+\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{6}x^3+o\left(x^3\right)\right)\\ &= e\left(1+2x+\frac{7}{2}x^2+\frac{17}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f(x) = e\left(1+2x+\frac{7}{2}x^2+\frac{17}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)}$.

Partie III

1. Soit $\mathscr{R}_n$ la propriété de récurrence : $\exists P_n \in \mathbb{R}[X] \big| \forall x \in I, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$

   ☞ $\mathscr{R}_0$ est-elle vraie ?.

   On pose $P_0 = X$ et on a : $\forall x \in I, P_0\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{1}{1-x}e^{\frac{1}{1-x}} = f^{(0)}(x)$ Donc $\boxed{\mathscr{R}_0 \textbf{ est vraie}}$

   ☞ Supposons $\mathscr{R}_n$ vraie pour un certain entier n. $\mathscr{R}_{n+1}$ est-elle vraie ?.

   Il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$. f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, on peut dériver cette expression. On obtient :

$$\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{1}{(1-x)^2}P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{(1-x)^2}P_n'\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)e^{\frac{1}{1-x}}$$

   On pose $P_{n+1} = X^2\left(P_n+P_n'\right)$, P_{n+1} est un polynôme tel que : $\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}$

   Donc $\boxed{\mathscr{R}_{n+1} \textbf{ est vraie}}$

   ☞ On a montré que $\mathscr{R}_0$ est vraie et, pour tout entier n, $\mathscr{R}_n$ vraie entraine $\mathscr{R}_{n+1}$ vraie. Ainsi par théorême de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{R}_n$ vraie, i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \big| \forall x \in I, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{1-x}}}$.

   De plus : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = X^2\left(P_n+P_n'\right)}$

2. On a déjà vu : $\boxed{P_0 = X}$. La relation de récurrence prédente permet d'obtenir les autres :
   $\boxed{P_1 = X^3+X^2 \quad, P_2 = X^5+4X^4+2X^3 \quad \textbf{et} \quad P_4 = X^7+9X^6+18X^5+6X^4}$

3. Comme f est solution de l'équation (E) donc on a : $\forall x \in I,\ \left(1-x^2\right)f'(x) = (2-x)f(x)$ En dérivant n fois cette relation, on a d'après la formule de Leibniz,

$$\forall x \in I,\ (1-x)^2 f^{(n+1)}(x) - 2n(1-x)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = (2-x)f^{(n)}(x) - nf^{(n-1)}(x)$$

   Donc en multipliant par $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 e^{-\frac{1}{1-x}}$, :

$$\forall x \in I,\ P_{n+1}\left(\frac{1}{1-x}\right) - \left((2n+1)\frac{1}{1-x}+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2\right)P_n\left(\frac{1}{1-x}\right)+\frac{n^2}{(1-x)^2}P_{n-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 0$$

   Donc, comme $x \longmapsto \frac{1}{1-x}$ est une bijection de I sur $\mathbb{R}_+^*$), le polynôme $P_{n+1} - \left[(2n+1)X+X^2\right]P_n(X) + n^2X^2P_{n-1}(X)$ possède une infinité de racines et est donc le polynôme nul. Ainsi :
   $\boxed{P_{n+1} = \left[(2n+1)X+X^2\right]P_n(X) - n^2X^2P_{n-1}(X)}$

4. Comme $P_0 = X$, la relation de récurrence précédente permet d'établir aisément que :
   $\boxed{P_n \textbf{ est unitaire, de degré } 2n+1 \textbf{ et de coefficient constant nul}}$

Partie IV

1. D'après la définition de P_n , on a : $a_n = f^{(n)}(0) = P_n(1)\,e$, d'où $a_{n+1} = ((2n+1)+1)\,a_n - n^2 a_{n-1}$, soit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = (2n+2)\,a_n - n^2 a_{n-1}}$

2. (a) On a calculé P_0, P_1, P_2, P_3, on en déduit
   $\boxed{a_0 = e,\ a_1 = 2e,\ a_2 = 7e \textbf{ et } a_3 = 34e, \textbf{ puis } a_4 = 8a_3 - 9a_2 = 209e}$.

   (b) f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ son développement limité à l'ordre 4 en 0 est obtenu par la formule de Taylor Young : $f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \frac{a_4}{4!}x^4 + o(x^4)$ Tous les calculs ont été faits précédemment. Ainsi : $\boxed{f(x) = e\left(1 + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{17}{3}x^3 + \frac{209}{24} + o(x^4)\right)}$

On reprend la suite de la première partie $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par $u_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}$.

Si p et n sont des entiers naturels quelconques, on pose :$S_p(n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$

3. (a) On a : $S_p(0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{i!}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!}$ Donc $\boxed{S_p(n) = u_p}$. De même, si $p \geqslant 1$ $S_p(1) = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{(i+1).i!}{(i!)^2} = 1 + \sum_{i=1}^{p} \frac{i}{i!} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i!} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} + \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} = u_p + u_{p-1}$. D'où : $\boxed{S_p(1) = u_p + u_{p-1}}$

   (b) Comme la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers e, on en déduit que
   $\boxed{(S_p(0))_{p\in\mathbb{N}} \textbf{ converge vers } e \textbf{ et } (S_p(1))_{p\in\mathbb{N}} \textbf{ converge vers } 2e}$

4. D'abord :
$$S_p(n+1) - (2n+2)\,S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i+1)! - (2n+2)(n+i)! + n^2(n+i-1)!}{(i!)^2}$$
Ensuite, on peut simplifier le terme général de la somme de droite :
$$\begin{aligned}\frac{(n+i+1)! - (2n+2)(n+i)! + n^2(n+i-1)!}{(i!)^2} &= \frac{(n+i-1)!\left[(n+i+1)(n+i) - (2n+2)(n+i) + n^2\right]}{(i!)^2} \\ &= \frac{(n+i-1)!\left(i^2 - i - n\right)}{(i!)^2}\end{aligned}$$
D'où pour tout $i \geqslant 1$, $\frac{(n+i+1)! - (2n+2)(n+i)! + n^2(n+i-1)!}{(i!)^2} = \frac{(n+i-1)}{((i-1)!)^2} - \frac{(n+i)!}{(i!)^2}$, et donc en revenant à la somme :
$$\begin{aligned}S_p(n+1) - (2n+2)\,S_p(n) + n^2 S_p(n-1) &= -n! + \sum_{i=1}^{p} \frac{(n+i-1)}{((i-1)!)^2} - \sum_{i=1}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} - \sum_{i=0}^{p} \frac{(n+i)!}{(i!)^2} \\ &= S_{p-1}(n) - S_p(n)\end{aligned}$$
On a démontré la relation :
$$\boxed{\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2\ S_p(n+1) - (2n+2)\,S_p(n) + n^2 S_p(n-1) = S_{p-1}(n) - S_p(n)}$$

5. Soit $\mathscr{R}_n$ la propriété de récurrence : **la suite** $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ **converge**
   ☞ $\mathscr{R}_0$ et $\mathscr{R}_1$ sont vraies d'après la question 3b.
   ☞ Supposons $\mathscr{R}_n$ et $\mathscr{R}_{n+1}$ vraies pour un certain entier n. $\mathscr{R}_{n+2}$ est-elle vraie ?.
   On sait alors que les suites $(S_p(n))_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_p(n+1))_{p\in\mathbb{N}}$ convergent. Or, d'après la question prćédente, on a : $\forall p \in \mathbb{N}^*, S_p(n+2) = (2n+3)\,S_p(n+1) - (n+1)^2 S_p(n) + S_{p-1}(n+1)$ donc la suite $(S_p(n+2))_{p\in\mathbb{N}}$ converge comme somme de suites convergentes.
   Donc $\boxed{\mathscr{R}_{n+2} \textbf{ est vraie}}$

☞ On a montré que $\mathscr{R}_0$ et $\mathscr{R}_1$ sont vraies et, pour tout entier n, $\mathscr{R}_n$ et $\mathscr{R}_{n+1}$ vraies entraine $\mathscr{R}_{n+2}$ vraie. Ainsi par théorême de récurrence double, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{R}_n$ vraie, i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \left(S_p\left(n\right)\right)_{p\in\mathbb{N}} \textbf{ converge}}$

6. Passons à la limite lorsque $p \to +\infty$ dans la relation établie précédemment :

$$S_p\left(n+1\right) - \left(2n+2\right)S_p\left(n\right) + n^2 S_p\left(n-1\right) = S_{p-1}\left(n\right) - S_p\left(n\right)$$

et appelons b_n la limite de $\left(S_p\left(n\right)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ pour chaque entier n, on obtient :

$$b_{n+1} - \left(2n+2\right)b_n + n^2 b_{n-1} = b_n - b_n$$

et on en déduit que les suites $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient la même relation de récurrence double. Mais de plus, $b_0 = e = a_0$ et $b_1 = 2e = a_1$; on en déduit que les suites $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales, c'est-à-dire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a : $\boxed{a_n = \lim\limits_{p\to+\infty} S_p\left(n\right) = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{p} \frac{\left(n+i\right)!}{\left(i!\right)^2}}$

Enfin, en remarquant $\binom{n+i}{n} \times \frac{1}{i!} = \frac{\left(n+i\right)!}{n!\left(i!\right)^2}$, on peut aussi écrire :

$$\boxed{a_n = \lim_{p\to+\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{\left(n+i\right)!}{\left(i!\right)^2} = \lim_{p\to+\infty} n! \sum_{i=0}^{p} \binom{n+i}{n} \cdot \frac{1}{i!}}$$

PROBLEME II : Somme des carrés des inverses des entiers

Partie A : Convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1. Par décroissance de $f : x \longmapsto \frac{1}{x^p}$ on a : $\forall x \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$ d'où, par positivité de l'intégrale, $\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dx$ ce qui s'écrit encore $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{(k+1)^p} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p}\,dx \leqslant \frac{1}{k^p}}$.
2. En sommant les inégalités précédentes pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et appliquant la relation de Chasles, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^p} \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p}$ Par changement d'indice $k := k-1$ dans la première somme, on tire : $\boxed{S_n(p) - 1 \leqslant \int_1^n \frac{dx}{x^p} \leqslant S_{n-1}(p).}$
3. – Si $p \geqslant 2$, alors $\int_1^A \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^A$, qui a pour limite $\frac{1}{p-1}$ lorsque A tend vers l'infini ;
   – si $p = 1$, alors $\int_1^A \frac{dx}{x^p} = [\ln x]_1^A$, a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
   On conclut que $\boxed{\int_1^x \frac{1}{t^p}\,dt \textbf{ a une limite finie lorsque } x \textbf{ tend vers } +\infty \textbf{ si et seulement si } p \geqslant 2.}$
4. Pour p fixé, la suite $\left(S_n(p)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est clairement croissante. Or, d'après la **question 2**,
   – si $p \geqslant 2$, alors $\forall n \geqslant 1$, $S_n(p) \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^p} \leqslant 1 + \frac{1}{p-1}$ donc la suite $\left(S_n(p)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée ;
   – si $p = 1$, alors $\forall n \geqslant 1$, $S_n(p) \geqslant \int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n(p) = +\infty$.
   Conclusion : $\boxed{\textbf{la suite } \left(S_n(p)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \textbf{ converge ssi } p \geqslant 2}$.

On note alors $\zeta(p) = \lim_{n\to+\infty} S_n(p)$.

Partie B : Calcul de $\zeta(2)$

Dans cette partie, on veut trouver un encadrement de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ pour en déduire une expression de $\zeta(2)$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considrère le polynôme P_n défini par : $P_n = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right)$
   (a) Les termes de degré $2n+1$ de P_n s'annulent. En regroupant les termes de degré $2n$ de P_n, on obtient $(2n+1)X^{2n}$. Ainsi $\boxed{\textbf{le degré de } P_n \textbf{ vaut } 2n}$
   (b) En utilisant la formule du binôme, on obtient : $P_n = \frac{1}{2i}\left(\sum_{k=0}^{2n+1} \left(i^k - (-i)^k\right)\binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k}\right)$
   Or dans cette somme, les termes pour k pair sont nuls : il ne reste que les termes avec k impair.
   On a alors : $\boxed{P_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{2n-2p}}$ $\qquad (R_1)$

(c) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. z est un zéro de P_n sssi $(z+i)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1}$ ssi $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1$. Or $\frac{z+i}{z-i}$ ne peut pas être égal à 1 car $z+i \neq z-i$. Ainsi :

$$P_n(z) = 0 \iff \exists k \in [\![1, 2n]\!] \left| \frac{z+i}{z-i} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right) \right. \iff \exists k \in [\![1, 2n]\!] \left| z = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \right. .$$

Or la fonction cotan est injective sur $]0, \pi[$ et lorsque k décrit $[\![1, 2n]\!]$, $\frac{k\pi}{2n+1}$ reste dans $]0, \pi[$. Ainsi less racines précédentes sont au nombre de $2n$. Comme P_n est de degré $2n$, on a trouvé toutes ses racines et elles sont simples.

Ainsi $\boxed{\textbf{les zéros de } P_n \textbf{ sont les } \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \textbf{ pour } k \in [\![1, 2n]\!]}$

(d) P_n est un polynôme de degré $2n$ dont on a trouvé toutes les racines. On en déduit :

$P_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{2n}\left(X - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$. Donc :

$$P_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)\left(X - \text{cotan}\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right)\right)$$

D'où $\boxed{P_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)}$ (R_2)

(e) Le coefficient en X^{2n-2} dans la relation (R_1) est $-\binom{2n+1}{3} = -\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$. Le coefficient en X^{2n-2} dans la relation (R_2) est $-(2n+1)\sum_{k=1}^{n}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$. Par unicité de ce coefficient, on a : $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}}$

(f) Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\frac{1}{\sin^2(x)} = 1 + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$. Ainsi : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = n + \sum_{k=1}^{n}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

i.e. $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}}$

2. (a) Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a : $\forall t \in [0, x]\ \cos(t) \leqslant 1 \leqslant 1 + \tan^2(t)$ Ainsi, en intégrant entre 0 et x, on obtient : $\boxed{\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)}$

(b) Si $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\frac{k\pi}{2n+1} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 \leqslant \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$. Comme ces termes sont strictement positifs, on en déduit l'inégalité des inverses :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!]\ ,\ \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}}$$

(c) En sommant ces inégalités, on en déduit :

$\sum_{k=1}^{n}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$, c'est-à-dire :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \times \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{2n(n+1)}{3} \times \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}.$$

La somme est encadrée par deux suites convergeant vers $\frac{\pi^2}{6}$, donc par convergence par encadrement, la suite $\left(S_n(2)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\boxed{\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}}$

Partie C : $\zeta(2)$ est irrationnel

Dans cette partie, pour n entier naturel non nul et x réel, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n\,(1-x)^n}{n\,!}$.

1. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

   (a) D'après la formule du binôme, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x^n\,(1-x)^n}{n\,!} = \dfrac{1}{n\,!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\,x^{n+k}$. Si on pose, pour $i \in [\![n, 2n]\!]$, $e_i = (-1)^{i-n}\dbinom{n}{i-n}$,

   on a bien trouvé une famille $\boxed{\text{d'entiers tels que } f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} e_i\,x^i}$.

   (b) – Pour $k > 2n$ ou $k < n$, $f_n^{(k)}(0) = 0$ car f_n est de degré $2n$ et admettant 0 pour zéro d'ordre n
   – Pour $k \in [\![n, 2n]\!]$. $f_n^{(k)}(0) = \dfrac{k!}{n!}e_k \in \mathbb{Z}$
   – Pour tout entier k, $f_n^{(k)}(1) = (-1)^k\,f_n^{(k)}(0)$ car $f_n(x) = f_n(1-x)$. Ainsi, puis que tous les $f_n^{(k)}(0)$ sont des entiers, c'est aussi le cas pour les $f_n^{(k)}(1)$
   Ainsi, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } k,\ f_n^{(k)}(0) \text{ et } f_n^{(k)}(1) \text{ sont des entiers.}}$.

> On veut montrer que π^2 est un irrationnel, et on va raisonner par l'absurde : on suppose que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls.

2. On pose, pour n entier naturel non nul et x réel :

$$F_n(x) = b^n(\pi^{2n}\,f_n(x) - \pi^{2n-2}\,f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4}\,f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n\,f_n^{(2n)}(x)).$$

   (a) Dans l'expression définissant $F_n(0)$ et $F_n(1)$, on a dans la parenthèse une somme de rationnels car on a supposé que π était rationnel et on a montré que les $f_n^{(k)}(0)$ et $f_n^{(k)}(1)$ sont des entiers. Donc les termes entre parenthèses de $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des rationnels. De plus les dénominateurs des π^{2k} sont des diviseurs de b^n. Donc comme on multiplie le tout par b^n, $\boxed{F_n(0) \text{ et } F_n(1) \text{ sont des entiers}}$.

   Remarque : on pouvait aussi constater $F_n(0) = b^n\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\pi^{2(n-k)}f_n^{(2k)}(0) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,a^{n-k}b^k f_n^{(2k)}(0)$ ce qui est entier.

   (b) On pose, pour n entier naturel non nul et x réel :

$$g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi\,F_n(x)\cos(\pi x), \quad \text{et} \quad A_n = \pi\int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

   g_n est dérivable et :
   $\forall x \in \mathbb{R}, g_n'(x) = (F_n''(x) + \pi^2 F_n(x))\sin\pi x$. Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, g_n'(x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x)}$.
   On en déduit que $A_n = \dfrac{1}{\pi}(g_n(1) - g_n(0)) = F_n(1) + F_n(0)$. Donc $\boxed{A_n \text{ est un entier.}}$

3. On pose, toujours pour le même entier a, $u_n = \dfrac{a^n}{n\,!}$.

(a) Par comparaison des suites usuelles, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

(b) Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, il existe un rang p_0 tel que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p_0 \Longrightarrow \frac{a^n}{n\,!} < \frac{1}{2}}$.

(c) Comme $\forall x \in [0,1], 0 \leqslant x(1-x) \leqslant 1$, on a $\boxed{\forall x \in [0,1], 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n\,!}}$.

(d) En appliquant cet encadrement pour $n \geqslant p_0$, on a : $\forall x \in [0,1], 0 \leqslant a^n f_n(x) \leqslant \frac{1}{2}$ avec une égalité uniquement en 0 et 1. Ainsi en intégrant, on trouve $\boxed{\forall n \geqslant p_0,\ A_n \in]0,1[}$ Comme il n'y a pas d'entier dans $]0,1[$, on en déduit une contradiction et donc $\boxed{\pi^2 \textbf{ est irrationnel}}$.

(e) Si π était rationnel, ce serait aussi le cas de π^2. Comme ce n'est pas le cas, on en déduit que $\boxed{\pi \textbf{ est irrationnel}}$