MPSI 14-15 Feuille n° 17 : Fractions rationnelles

Du 04/02/15 au 09/02/15

Exercice 1. Décomposer en éléments simples :

1. $\dfrac{1}{(X+1)(X+2)}$
2. $\dfrac{3}{(X^3+1)}$
3. $\dfrac{2X-3}{(X-1)(X-2)}$
4. $\dfrac{2X^3+6X^2-4X-4}{X(X+1)(X-1)^2}$
5. $\dfrac{3X^2+X+1}{(X-1)(X^2-4)}$
6. $\dfrac{4X^3}{(X^4-1)}$
7. $\dfrac{1}{(X-1)(2X+1)^2}$
8. $\dfrac{X^3-4X+5}{(X-1)^2}$
9. $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$

Exercice 2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

1. $\dfrac{1}{X^4+1}$
2. $\dfrac{X^4+2}{X(X^2+1)(X^2-2)^2}$
3. $\dfrac{-12X}{X^6-14X^4+49X^2-36}$
4. $\dfrac{3X^5+2X^4+X^2+3X+2}{X^4+1}$

Exercice 3. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

1. $\dfrac{1}{(X^n-1)}$
2. $\dfrac{1}{1+X+X^2+\cdots+X^{n-1}}$
3. $\dfrac{X^n+1}{(X^n-1)}$
4. $\dfrac{n!}{X(X-1)\cdots(X-n)}$ en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice 4. Calculer la dérivée n-ième de la fraction : $F(X)=\dfrac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)}$

Exercice 5. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{3X+5}{X^3+6X^2+11X+6}$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{3k+5}{k^3+6k^2+11k+6}$

Exercice 6. 1. Factoriser $X^6+2X^5+2X^4+2X^3+X^2$ sachant qu'il y a des racines rationnelles

2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^7+3X^6+8X^5+9X^4+X^2-X-1}{X^6+2X^5+2X^4+2X^3+X^2}$

Exercice 7. 1. Calculer $S_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{k^3-k}$

2. Calculer $T_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{3k^2-1}{(k^3-k)^2}$

Exercice 8. Soit $P=M\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$ un polynnôme scindé à racines simples.

1. Montrer que $\dfrac{P'}{P}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-a_k}$
2. En déduire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P''P-(P')^2}{P^2}$
3. Déduire des deux premières questions $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\frac{z_k^3+2}{(z_k^2-1)^2}$ où les z_k sont les zéros de X^4-X^3+1

Exercice 9. 1. Déterminer les polynômes Q_1,Q_2,Q_3,R_1,R_2,R_3 avec $\deg(R_k)<2$ obtenus par les divisions euclidiennes : $X^7+1=(X^2+X+1)\,Q_1+R_1$, $Q_1=(X^2+X+1)\,Q_2+R_2$ et $Q_2=(X^2+X+1)\,Q_3+R_3$

2. En déduire la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$