Devoir en temps libre n° 10

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME I : Etude de la fonction $x \to \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}$

1. (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$
   (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Donner la valeur en 0 de ce prolongement. On pose g la fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathbb{R}^*$ est f.
   (c) Déterminer un développement limité de g à l'ordre 5 en 0.
   (d) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Préciser les valeurs de $g'(0)$ et $g''(0)$.
2. (a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+ ,\ 0 \leqslant t\,\mathrm{ch}(t) - \mathrm{sh}(t) \leqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}^2(t)$
   (b) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$. Montrer que g est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   (c) Tracer la courbe représentative de g.

PROBLEME II : Développement asymptotique de x_n tel que $\tan x_n = x_n$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet sur $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$, une unique solution notée x_n. On montrera aussi que $x_n \in \left]n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$.
   Le but du problème est de chercher un développement limité à la précision $\frac{1}{n^4}$ de x_n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = x_n - n\pi$
   (a) Montrer que l'on a : $y_n = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$
   (b) En déduire la limite éventuelle de y_n puis trouver un développement généralisé de x_n à la précision n^0.
3. Dans cette question, on veut obtenir un DLG de x_n à la précision $\frac{1}{n^2}$
   (a) En utilisant ce qui précède, donner un DLG de $\dfrac{1}{x_n}$ à la précision $\frac{1}{n^2}$
   (b) En déduire un DLG de y_n à la précision $\frac{1}{n^2}$
   (c) En déduire un DLG de x_n à la précision $\frac{1}{n^2}$
4. Renouveler la méthode précédente pour montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi^2}\right)\frac{1}{n^3\pi} + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\right)\frac{1}{2n^4\pi} + \circ\left(\frac{1}{n^4}\right)$$