# Devoir en temps libre n° 11

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

## PROBLEME : Polynômes de Tchebychev de première espèce

On considère les polynômes $P_n$ définis par : $P_0 = I, P_1 = X$ et la relation de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$

**PARTIE I**

1. Calculer $P_2, P_3, P_4$
2. (a) Montrer que $P_n$ est de degré $n$. Déterminer son coefficient dominant
   (b) Montrer que $P_n$ est pair si $n$ est pair et $P_n$ est impair si $n$ est impair.
   (c) Calculer $P_n(0), P_n(1)$ et $P_n(-1)$
3. (a) Montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, P_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$
   (b) Montrer que $P_n$ est l'unique polynôme $P$ de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :
   $\forall \alpha \in \mathbb{R}, P(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$
   (c) Montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, P_n(\cosh(\alpha)) = \cosh(n\alpha)$
   (d) Déterminer toutes les racines de $P_n$ ( On cherchera d'abord les racines de $P_n$ de la forme $\cos(\alpha)$ donc se trouvant dans $[-1, 1]$, puis on montrera qu'on les a toutes trouvées)
   (e) Déterminer toutes les racines de $P'_n$
   (f) Montrer, en utilisant la relation de récurrence satisfaite par les $P_n$, que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \wedge P_{n+1} = I$
   (g) Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P_n}$

**PARTIE II** Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $u_n = P_n(x)$

1. Ecrire, à partir de la définition de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une relation de récurrence entre $u_{n+2}, u_{n+1}$ et $u_n$
2. En utilisant les résultats généraux sur les suites récurrentes linéaires doubles, montrer que :
   (a) si $x \in ]-1, 1[$, alors $u_n = \dfrac{1}{2}\left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right)$
   (b) si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, alors $u_n = \dfrac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$
   (c) Que se passe-t-il si $x = \pm 1$ ?
3. Retrouver ces résultats à l'aide des résultats de la partie I