

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 12

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière au soin de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME I : Polynômes de Tchebychev de première espèce (suite)

On considère les polynômes P_n définis par : $P_0 = I, P_1 = X$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

On rappelle que l'on a : P_n de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} si $n \geq 1$. On sait aussi qu'il est de la parité de n , qu'il vérifie : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, P_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$, qu'il possède n zéros réels distincts : les $\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

PARTIE IV 1. Montrer que P_n est à coefficients entiers.

2. Après avoir calculer la dérivée seconde de la fonction $x \rightarrow \cos(nx)$ de deux façons différentes, montrer que P_n satisfait l'équation différentielle :

$$(1 - X^2) P_n''(X) - X P_n'(X) + n^2 P_n(X) = 0$$

3. On note $P_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k X^{n-2k}$

Calculer a_{k+1} en fonction de a_k . En déduire la valeur des a_k .

4. Donner les coefficients des polynômes P_3, P_4 et P_5 .

PARTIE V Dans cette partie, on cherche à montrer que $\frac{1}{3}$ est l'unique rationnel $r \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $\cos(r\pi)$ appartienne à \mathbb{Q} .

À cet effet, on pose donc $r = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ et $1 \leq p < \frac{q}{2}$ (donc $q \geq 3$).

Dans les questions 1 à 4, on suppose que $\cos(r\pi)$ appartient à \mathbb{Q} .

1. Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$ appartient à \mathbb{Q} en utilisant le théorème de Bezout et la question 1 de la partie IV.
2. Montrer que q n'est pas un multiple de 4.
3. On considère l'équation à coefficients entiers :
 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.
 On suppose que cette équation admet une solution rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$.
 Montrer que α divise a_0 et β divise a_n . En déduire que si q est impair, alors $q = 3$.
4. q peut-il être pair ?
5. Conclure.

PROBLEME II : Polynômes de Bernoulli (suite)

On définit les polynômes P_n par les conditions : $B_0 = I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $B'_{n+1} = B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0$.

On rappelle que l'on a : B_n de degré n et de coefficient dominant $\frac{1}{n!}$

1. Expliciter les polynômes B_1, B_2, B_3, B_4 et B_5 .

PARTIE II 1. Montrer, de préférence sans récurrence, que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, 1[, 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

2. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, la fonction ϕ_n définie par :

$$\forall t \in]0, 1[, \phi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}$$

est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$ et que le prolongement (que l'on notera encore ϕ_n) est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

3. Montrer, par exemple à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(xt) dt = 0.$$

4. Pour k et n entiers strictement positifs, on définit : $I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t) \cos(2k\pi t) dt$.

Trouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-2k,k}$ et en déduire selon la parité de n , l'expression de $I_{n,k}$ en fonction de k et de n .

5. En utilisant la formule du 1, trouver, pour $N \in \mathbb{N}$, une expression de $\int_0^1 \phi_{2m}(t) \sin((2N+1)\pi t) dt$ en fonction de m, N et $B_{2m}(0)$.

En déduire la convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2m}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et la valeur de la limite, notée $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}}$ en fonction de m et $B_{2m}(0)$.

Expliciter $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

6. Montrer, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la majoration : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leq 2$ et en déduire : $|B_{2m}(0)| \leq \frac{4}{(4\pi^2)^m}$

CORRECTION

PROBLEME I : Polynômes de Tchebychev de première espèce (suite)

$$P_0 = I, P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

On rappelle que l'on a : P_n de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} si $n \geq 1$. On sait aussi qu'il est de la parité de n , qu'il vérifie : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, P_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$, qu'il possède n zéros réels distincts : les $\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

PARTIE IV 1. Soit \mathcal{R}_n : " P_n et P_{n+1} sont à coefficients entiers "

☞ \mathcal{R}_0 est-elle vraie ? $P_0 = I$ et $P_1 = X$ sont à coefficients entiers donc **\mathcal{R}_0 est vraie**

☞ Supposons \mathcal{R}_n vraie pour un certain entier n . \mathcal{R}_{n+1} est-elle vraie ?

On a P_n et P_{n+1} à coefficients entiers. Donc $2XP_{n+1} - P_n$ est aussi à coefficients entiers. En particulier, P_{n+1} et P_{n+2} sont à coefficients entiers. Ainsi **\mathcal{R}_{n+1} est vraie**

☞ On a montré que \mathcal{R}_0 est vraie et, pour tout entier n , \mathcal{R}_n vraie entraîne \mathcal{R}_{n+1} vraie. Ainsi par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{R}_n$ vraie, et en particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n \text{ est à coefficients entiers}$$

2. On pose f la fonction qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $f(t) = P_n(\cos(t)) = \cos(nt)$. f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et on a d'une part :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) = -\cos(t)P'_n(\cos(t)) + \sin^2(t)P''_n(\cos(t))$$

$$\text{et d'autre part : } \forall t \in \mathbb{R}, f''(t) = -n^2P_n(\cos(t)).$$

$$\text{Ainsi : } \forall t \in \mathbb{R}, n^2P_n(\cos(t)) - \cos(t)P'_n(\cos(t)) + \sin^2(t)P''_n(\cos(t)) = 0$$

En particulier, le polynôme : $n^2P_n - XP'_n + (1-X^2)P''_n$ s'annule en tout $\cos(t)$ donc en tout point de $[-1, 1]$ car $\cos(t)$ décrit $[-1, 1]$ lorsque t décrit \mathbb{R} . Ainsi P_n satisfait l'équation différentielle :

$$(1-X^2)P''_n(X) - XP'_n(X) + n^2P_n(X) = 0$$

3. On note $P_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k X^{n-2k}$

$$\text{On a : } P'_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n-2k)a_k X^{n-2k-1} \text{ et } P''_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n-2k)(n-2k-1)a_k X^{n-2k-2}.$$

Ainsi, comme $X^2 P''_n + X P'_n - n^2 P_n = P''_n$, on en déduit :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n-2k)(n-2k-1)a_k X^{n-2k-2} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 4k(k-n)a_k X^{n-2k} \text{ i.e.}$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} (n-2k)(n-2k-1)a_k X^{n-2k-2} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} 4(k+1)(k+1-n)a_{k+1} X^{n-2k-2}$$

La famille $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ étant libre, on peut identifier et on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \rrbracket, a_{k+1} = \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{4(k+1)(k+1-n)} a_k$$

En remarquant que a_0 est le coefficient dominant de P_n et en regroupant certains facteurs pour reconnaître des factorielles, on en déduit :

$$a_k = (-1)^k \frac{n}{n-k} 2^{n-2k-1} \binom{n-k}{k}$$

4. En utilisant les expressions précédentes ou en reprenant la relation de récurrence, on montre :

$$P_3 = 4X^3 - 3X, P_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1 \text{ et } P_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X$$

PARTIE V On pose $r = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ et $1 \leq p < \frac{q}{2}$ (donc $q \geq 3$).

Dans les questions 1 à 4, on suppose que $\cos(r\pi)$ appartient à \mathbb{Q} .

1. $p \wedge q = 1$ donc d'après Bezout, il existe un couple (u, v) d'entiers tel que $pu + qv = 1$. Ainsi

$$\frac{\pi}{q} = \pi v + ur\pi \text{ donc } \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) = (-1)^v P_{|u|}(\cos(r\pi)).$$

Donc, puisque $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$ et $P_{|u|}$ est à coefficients entiers, on a $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q}$.

2. On suppose par l'absurde que q est un multiple de 4.

On écrit q sous la forme $q = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

On a alors $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = P_k\left(\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)$. Comme P_k est à coefficients entiers et $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q}$, on en déduit $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Q}$ i.e. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux.

Ainsi q n'est pas un multiple de 4.

3. On considère l'équation à coefficients entiers :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \text{ avec } a_0 \neq 0 \text{ et } a_n \neq 0.$$

On suppose que cette équation admet une solution rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$.

On a montré en exercice qu'alors α divise a_0 et β divise a_n .

Si q est impair, le coefficient constant de P_q est nul. Or $P_q\left(\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\right) = -1$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$ est racine de $P_q + 1$ qui est à coefficients entiers, de coefficient dominant 2^{q-1} et de coefficient constant 1. Donc si $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$ est rationnel de la forme $\frac{\alpha}{\beta}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$, on en déduit $\alpha = 1$ et $\beta = 2^k$ avec $0 \leq k \leq q-1$ car, par ailleurs, $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) > 0$. Mais alors soit $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) = 1$ ce qui est impossible, soit $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \leq \frac{1}{2}$. Or $q \geq 3$ donc par décroissance de \cos sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \geq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. En regroupant les deux inégalités, on en déduit $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) = \frac{1}{2}$ et $q = 3$.

si q est impair, alors $q = 3$.

4. Si q est pair, alors comme q n'est pas un multiple de 4, on a $q = 2k$ avec k impair et donc $k \geq 3$. $\cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)^2 - 1 \in \mathbb{Q}$ donc, d'après la question précédente, $k = 3$.

Ainsi $q = 6$. Or $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$. Ainsi q ne peut pas être pair.

5. On a trouvé que pour que $\cos\left(\frac{p\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q}$ avec $\frac{p}{q} \in]0, \frac{1}{2}[$, il fallait $q = 3$ et donc également $p = 1$. Réciproquement $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

Donc $\frac{1}{3}$ est le seul rationnel $r \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$.

PROBLEME II : Polynômes de Bernoulli (suite)

On définit les polynômes P_n par les conditions : $B_0 = I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $B'_{n+1} = B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1}(t) dt = 0$.

On rappelle que l'on a : B_n de degré n et de coefficient dominant $\frac{1}{n!}$

1. On trouve : $B_1 = X - \frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$, $B_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X$,

$$B_4 = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{24}X^2 - \frac{1}{720} \text{ et } B_5 = \frac{1}{120}X^5 - \frac{1}{48}X^4 + \frac{1}{72}X^3 - \frac{1}{720}X.$$

Partie II : Séries de Riemann et nombres de Bernoulli

1) Montrer, de préférence sans récurrence, que : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0,1[, 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in]0,1[$. On pose $T = 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2k\pi t)$

$$\text{On a : } T = \sum_{k=-N}^N \cos(2k\pi t) = \text{Re} \left(\sum_{k=-N}^N e^{2ik\pi t} \right) = \text{Re} \left(e^{-2iN\pi t} \left(\sum_{k=0}^{2N} e^{2ik\pi t} \right) \right) = \text{Re} \left(e^{-2iN\pi t} \left(\frac{1 - e^{2i(2N+1)\pi t}}{1 - e^{2i\pi t}} \right) \right) \text{ car } e^{2i\pi t} \neq 1$$

$$\text{Ainsi } T = \text{Re} \left(e^{-2iN\pi t} \left(\frac{2i \sin((2N+1)\pi t) e^{i(2N+1)\pi t}}{2i \sin(\pi t) e^{i\pi t}} \right) \right) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}. \text{ D'où : } 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

2) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, la fonction φ_n définie par $\forall t \in]0,1[, \varphi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ et que le prolongement (que l'on note encore φ_n) est de classe C^1 sur $[0,1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. En 0, pour $t \in]0,1[$, on a : $B_n(t) = B_n(0) + B'_n(0)t + o(t)$.

Aussi $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_n(t) = \frac{B'_n(0)}{\pi}$: **φ_n est donc prolongeable par continuité en 0, le prolongement étant noté $\varphi_n(0) = \frac{B'_n(0)}{\pi}$**

φ_n est de classe C^1 sur $]0,1[$ car quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0,1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus :

$$\forall t \in]0,1[: \varphi'_n(t) = \frac{B'_n(t) \sin(\pi t) - \pi (B_n(t) - B_n(0)) \cos(\pi t)}{(\sin(\pi t))^2}$$

Or B_n et B'_n étant des polynômes, ils admettent des DL à tout ordre en 0 et on a :

$$B'_n(t) \sin(\pi t) - \pi (B_n(t) - B_n(0)) \cos(\pi t) = (B'_n(0) + B''_n(0)t + o(t)) (\pi t + o(t^2)) - \pi (B'_n(0)t + \frac{B''_n(0)}{2}t^2 + o(t^2)) (1 - \frac{\pi^2 t^2}{2} + o(t^2))$$

$$\text{D'où } \varphi'_n(t) = \frac{\frac{\pi B''_n(0)}{2} t^2 + o(t^2)}{\pi^2 t^2 + o(t^2)} \text{ D'où } \varphi'_n \text{ possède une limite finie } \frac{B''_n(0)}{2\pi} \text{ en } 0$$

Ainsi φ_n est continue sur $[0,1]$, de classe C^1 sur $]0,1[$ et φ'_n possède une limite finie en 0, donc d'après le théorème de prolongement, **φ_n est de classe C^1 sur $[0,1]$**

$$\text{D'autre part, on a : } \forall t \in]0,1[, \varphi_n(1-t) = \frac{B_n(1-t) - B_n(0)}{\sin(\pi - \pi t)} = \frac{(-1)^n B_n(t) - (-1)^n B_n(1)}{\sin(\pi t)} = (-1)^n \varphi_n(t) \text{ car } B_n(0) = B_n(1)$$

Aussi on a les mêmes résultats en 1 qu'en 0, et donc, **φ_n est de classe C^1 sur $[0,1]$**

3) Montrer, par exemple à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall f \in C^1([0,1], \mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(xt) dt = 0$

Soit f de classe C^1 sur $[0,1]$ et $x > 0$. En intégrant par parties, on a : $\int_0^1 f(t) \sin(xt) dt = \left[\frac{-\cos(xt)}{x} f(t) \right]_0^1 +$

$$\int_0^1 f'(t) \frac{\cos(xt)}{x} dt$$

Ainsi, puisque $|f|$ et $|f'|$ sont continues sur $[0,1]$ donc majorées (par exemple par le majorant commun M), on obtient :

$$\left| \left[\frac{-\cos(xt)}{x} f(t) \right]_0^1 + \int_0^1 f'(t) \frac{\cos(xt)}{x} dt \right| \leq \left| \left[\frac{\cos(xt)}{x} f(t) \right]_0^1 \right| + \int_0^1 |f'(t)| \frac{1}{x} dt \leq \frac{2M}{x} + \frac{M}{x} = \frac{3M}{x}. \text{ D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(xt) dt = 0$$

4) Pour k et n entiers strictement positifs, on définit : $I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t) \cos(2k\pi t) dt$. Trouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-2,k}$ et en déduire selon la parité de n , l'expression de $I_{n,k}$ en fonction de k et de n .

- Si $n = 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{1,k} = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2} \right) \cos(2k\pi t) dt = \left[\frac{t \sin(2k\pi t)}{2k\pi} + \frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2} \right]_0^1 = 0$

- Si $n \geq 2$ et $k \in \mathbb{N}^*$. En intégrant deux fois par parties $I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t) \cos(2k\pi t) dt$, on obtient :

$$I_{n,k} = \left[\frac{B_n(t) \sin(2k\pi t)}{2k\pi} + \frac{B_{n-1}(t) \cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2} \right]_0^1 - \frac{1}{(2k\pi)^2} \int_0^1 B_{n-2}(t) \cos(2k\pi t) dt = \frac{1}{(2k\pi)^2} (B_{n-1}(1) - B_{n-1}(0) - I_{n-2,k}) \text{ Ainsi}$$

- Si $n = 2$, on a $I_{2,k} = \frac{1}{(2k\pi)^2}$ • Si $n > 2$, on a $I_{n,k} = \frac{-1}{(2k\pi)^2} I_{n-2,k}$

D'où : **si n est impair, $\forall k \in \mathbb{N}^*, I_{n,k} = 0$ et si n est pair, avec $n = 2p, p \geq 1$, on a $\forall k \in \mathbb{N}^* I_{2p,k} = \frac{(-1)^{p+1}}{(2k\pi)^{2p}}$**

5) En utilisant la formule du II 1, trouver, pour $N \in \mathbb{N}$, une expression de $\int_0^1 \varphi_{2m}(t) \sin((2N+1)\pi t) dt$ en fonction de m, N et $B_{2m}(0)$.

En déduire la convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2m}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et la valeur de la limite, notée $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}}$, en fonction de m et $B_{2m}(0)$. Expliciter $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$

Si $m = 0$, on a $\int_0^1 \varphi_0(t) \sin((2N+1)\pi t) dt = 0$

Si $m \geq 1$. On a : $\int_0^1 \varphi_{2m}(t) \sin((2N+1)\pi t) dt = \int_0^1 (B_{2m}(t) - B_{2m}(0)) \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} dt = \int_0^1 (B_{2m}(t) - B_{2m}(0)) dt + 2$

$$\sum_{k=1}^N \int_0^1 (B_{2m}(t) - B_{2m}(0)) \cos(2k\pi t) dt$$

D'où $\int_0^1 \varphi_{2m}(t) \sin((2N+1)\pi t) dt = \int_0^1 B_{2m}(t) dt - B_{2m}(0) + 2 \sum_{k=1}^N I_{2m,k} - 2 B_{2m}(0) \sum_{k=1}^N \int_0^1 \cos(2k\pi t) dt$

Or $\int_0^1 B_{2m}(t) dt = 0$, $\int_0^1 \cos(2k\pi t) dt = 0$ et $I_{2m,k} = \frac{(-1)^{m+1}}{(2k\pi)^{2m}}$. D'où : $\int_0^1 \varphi_{2m}(t) \sin((2N+1)\pi t) dt = 2 \frac{(-1)^{m+1}}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2m}} - B_{2m}(0)$

Puisque φ_{2m} est de classe C^1 sur $[0,1]$, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 \varphi_{2m}(t) \sin((2N+1)\pi t) dt = 0$

Donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2m}}$ existe et vaut : $\frac{(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m} B_{2m}(0)}{2}$: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}} = \frac{(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m} B_{2m}(0)}{2}$

Pour $m = 1$ on a $B_2(0) = \frac{1}{12}$ et pour $m = 2$ on a $B_4(0) = -\frac{1}{720}$, donc : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$

6) Montrer, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la majoration : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leq 2$ et en déduire $\left| B_{2m}(0) \right| \leq \frac{4}{(4\pi^2)^m}$

Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. On a : $\forall x \in [k-1, k], \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k^{2m}}$ D'où : $\int_{k-1}^k \frac{dx}{x^2} \geq \frac{1}{k^{2m}}$.

Aussi $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2m}} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^{2m}} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^2} = 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$.

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leq 2$

En utilisant cette majoration dans l'expression $B_{2m}(0) = \frac{2(-1)^{m+1}}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}}$, on en déduit : $\left| B_{2m}(0) \right| \leq \frac{4}{(4\pi^2)^m}$

PARTIE II 1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, 1[$. On pose $T = 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2k\pi t)$. On a :

$$T = \sum_{k=-N}^N \cos(2k\pi t) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=-N}^N e^{2ik\pi t} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{-2iN\pi t} \left(\sum_{k=0}^{2N} e^{2ik\pi t} \right) \right)$$

$$\text{Donc } T = \operatorname{Re} \left(e^{-2iN\pi t} \left(\frac{1 - e^{2i(2N+1)\pi t}}{1 - e^{2i\pi t}} \right) \right) \text{ car } e^{2i\pi t} \neq 1.$$

$$\text{Ainsi } T = \operatorname{Re} \left(e^{-2iN\pi t} \left(\frac{2i \sin((2N+1)\pi t) e^{i(2N+1)\pi t}}{2i \sin(\pi t) e^{i\pi t}} \right) \right) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

$$\text{Ainsi } \forall N \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, 1[, \quad \boxed{1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}}$$

2. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, la fonction ϕ_n définie par :

$\forall t \in]0, 1[, \phi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}$ est prolongeable par continuité sur $[0, 1]$ et que le prolongement (que l'on notera encore ϕ_n) est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

3. Montrer, par exemple à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(xt) dt = 0.$$

4. Pour k et n entiers strictement positifs, on définit : $I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t) \cos(2k\pi t) dt$.

Trouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-2k,k}$ et en déduire selon la parité de n , l'expression de $I_{n,k}$ en fonction de k et de n .

5. En utilisant la formule du 1, trouver, pour $N \in \mathbb{N}$, une expression de $\int_0^1 \phi_{2m}(t) \cos((2N+1)\pi t) dt$ en fonction de m , N et $B_{2m}(0)$.

En déduire la convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2m}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et la valeur de la limite, notée $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}}$

en fonction de m et $B_{2m}(0)$.

Expliciter $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$.

6. Montrer, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la majoration : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leq 2$ et en déduire : $|B_{2m}(0)| \leq \frac{4}{(4\pi^2)^m}$