MPSI 14-15 Feuille n° 19 : Applications linéaires

Du 18/02/15 au 13/03/15

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$

ii) f et g sont deux projecteurs et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g)$

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que les équivalences :

a) $\ker(f) = \ker\left(f^2\right) \iff \ker(f) \bigcap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$

b) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right) \iff \ker(f) + \mathrm{Im}(f) = E$

Exercice 3. Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient $\phi : E \mapsto E, f \to f'$ et $\eta : E \mapsto E, f \to g$ où g est l'unique primitve de f s'annulant en 0

1. Montrer que ϕ et η sont des endomorphismes de E.
2. Exprimer $\phi \circ \eta$ et $\eta \circ \phi$
3. Étudier l'injectivité et la surjectivité de ϕ et de η

Exercice 4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 5f + 6Id_E = 0_{L(E)}$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E et que $E = \ker(f - 2Id_E) \oplus \ker(f - 3Id_E)$.
2. Montrer que $p = f - 2Id_E$ et $q = -f + 3Id_E$ sont deux projecteurs associés.
3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Exprimer f^n en fonction de p et q.

Exercice 6. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une application linéaire de E vers F. Soient A et B deux sev de E. Montrer que :
$f(A) \subset f(B) \iff (A + \ker(f)) \subset (B + \ker(f))$

Exercice 7. Soit f une application linéaire de E vers F. Soit $\phi : E \times F \mapsto E \times F, (x, y) \to (x, y - f(x))$. Montrer que ϕ est un automorphisme.

Exercice 8. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de base (e_1, e_2) et F un ev de base (f_1, f_2, f_3). On définit ϕ et ψ dans $L(E, F)$ par : $\phi(e_1) = f_2 + f_3, \phi(e_2) = -f_1 - f_2$, $\psi(e_1) = f_1 - 2f_2 + 3f_3$ et $\psi(e_2) = -2f_1 + 4f_2 - 6f_3$. Déterminer les noyaux et les images de ces deux applications linéaires.

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $f \in L(E)$. Montrer que les cinq propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ **(iii)** $\ker(f) \bigcap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ **(v)** $\ker(f) = \ker\left(f^2\right)$

(ii) $E = \ker(f) + \mathrm{Im}(f)$ **(iv)** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}\left(f^2\right)$

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension n. Soit $f \in L(E)$ tel que : $f^2 = -Id_E$.

1. Calculer $rg(f)$
2. Montrer que $E = \ker(f - iId_E) \oplus \ker(f + iId_E)$

Exercice 11. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$.

1. Montrer que : $\ker\left(g_{|\operatorname{Im}(f)}\right) = \ker(g) \bigcap \operatorname{Im}(f)$
2. En déduire : $rg(g \circ f) = rg(f) - \dim\left(\ker(g) \bigcap \operatorname{Im}(f)\right)$
3. En déduire : $rg(g \circ f) \geqslant rg(f) + rg(g) - \dim(F)$

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n. Soit $f \in L(E)$. Soit $a \in E$ tel que $(a, f(a), \cdots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E.

1. Montrer que : $(Id_E, f, \cdots, f^{n-1})$ est une famille libre de $L(E)$
2. En déduire que : $\forall g \in L(E)$, $g \circ f = f \circ g \Longleftrightarrow g \in vect\left(Id_E, f, \cdots, f^{n-1}\right)$

Exercice 13. Déterminer dans chaque cas, le noyau et l'image de l'application linéaire f :

1. $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \to (x - y, y + z, x + y + z)$
2. $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$, $(x, y) \to (x, x + y, x + 2y)$
3. $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $(x, y, z) \to x - 3y + 2z$
4. $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \to (x, y, 0)$