MATRICES

A) CALCUL MATRICIEL

I) Espaces de matrices

Soit K = ℝ ou ℂ. Soit (n,p) un couple d'entiers naturels non nuls

Définition: On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes (ou d'ordre (n,p)) sur le corps K, une application M de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \to K$ qui au couple (i,j) associe $m_{i,j} \in K$.

On note $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$. On représente M par un tableau à n lignes et p colonnes,

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \ddots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$ où $m_{i,j}$ est sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne.

Définition: i est **l'indice de ligne** (1^{er} indice) et j **l'indice de colonne** (2^{nd} indice).
La **hauteur** de M est son nombre de lignes (ici n).
La **largeur** de M est son nombre de colonnes (ici p).
Une **rangée** est une ligne ou une colonne.

Définition: Une **matrice ligne** (ou uniligne) est une matrice de hauteur 1.
Une **matrice colonne** est une matrice de largeur 1.
Une **matrice carrée** est une matrice ayant même hauteur et largeur.

Définition: On appelle $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices d'ordre (n,p) sur K.

Structure de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$

On munit $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ d'une addition + définie par: $(m_{i,j})_{(i,j)} + (m'_{i,j})_{(i,j)} = (m_{i,j} + m'_{i,j})_{(i,j)}$ et d'une loi externe · définie par: $\lambda \cdot (m_{i,j})_{(i,j)} = (\lambda \cdot m_{i,j})_{(i,j)}$

Théorème: ($\mathcal{M}_{n,p}(K)$, + , ·) est un espace vectoriel sur K de dimension n×p.

Dem: On vérifie les axiomes d'espace vectoriel. En particulier, le neutre est $0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Donc on a bien ($\mathcal{M}_{n,p}(K)$, + , ·) K-e-v. Soit $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de rang (i,j) qui vaut 1 .

Toute matrice s'écrit de manière unique sous la forme $(m_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} m_{i,j} E_{i,j}$

Ainsi $(E_{i,j})_{(i,j)\in[1,n]\times[1,p]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, et donc la dimension de $M_{n,p}(K)$ est np.

Définition: Les matrices $E_{i,j}$ s'appellent **matrices élémentaires**.
La base $(E_{i,j})_{(i,j)}$ s'appelle la **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

II) Produit matriciel

Soit (n,p,q) trois entiers naturels non nuls. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$.

On note $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ddots & b_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p,1} & b_{p,2} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix}$ On définit $A \times B = C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,q} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \ddots & c_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,q} \end{pmatrix}$, le produit des matrices A et B par : la relation $\mathbf{c_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, b_{j,k}}$ **Règle de multiplication**

Remarques: 1) Pour pouvoir effectuer le produit des deux matrices A par B il faut que la largeur de A soit la hauteur de B (donc le produit n'est pas commutatif).

2) Le résultat du produit de A par B est une matrice qui a la hauteur de A et la largeur de B.

Exemples: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

Propriétés de la multiplication

Propriété : Associativité Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(K)$, alors les produits $A\times B$, $B\times C$, $(A\times B)\times C$ et $A\times(B\times C)$ existent et on a: $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$

Dem: On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$, $B = (b_{j,k})_{\substack{1\le j\le p\\1\le k\le q}}$, $C = (c_{k,v})_{\substack{1\le k\le q\\1\le v\le r}}$, $D = A\times B = (d_{i,k})_{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le q}}$,

$E = D\times C = (e_{i,v})_{\substack{1\le i\le n\\1\le v\le r}}$, $F = B\times C = (f_{j,v})_{\substack{1\le j\le p\\1\le v\le r}}$ et $G = A\times F = (g_{i,v})_{\substack{1\le i\le n\\1\le v\le r}}$.

On a : $\forall (i,k)\in [\![1, n]\!]\times[\![1, q]\!]$, $d_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, b_{j,k}$ et $\forall (i,v)\in [\![1, n]\!]\times[\![1, r]\!]$, $e_{i,v} = \sum_{k=1}^{q} d_{i,k}\, c_{k,v} = \sum_{\substack{1\le j\le p\\1\le k\le q}} a_{i,j}\, b_{j,k}\, c_{k,v}$ et :

$\forall (j,v)\in [\![1, p]\!]\times[\![1, r]\!]$, $f_{j,v} = \sum_{k=1}^{q} b_{j,k}\, c_{k,v}$ et $\forall (i,v)\in [\![1, n]\!]\times[\![1, r]\!]$ $g_{i,v} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, f_{j,v} = \sum_{\substack{1\le j\le p\\1\le k\le q}} a_{i,j}\, b_{j,k}\, c_{k,v} = e_{i,v}$

Ainsi E = G , i.e., $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$

Propriété 2: Bilinéarité 1) Si on fixe $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$. Alors l'application de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ vers $\mathcal{M}_{n,q}(K)$ qui à A associe $A\times B$ est linéaire.

2) Si on fixe $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Alors $\mathcal{M}_{p,q}(K) \to \mathcal{M}_{n,q}(K)$, $B \to A\times B$ est linéaire.

Dem: On note $(\alpha,\beta)\in K^2$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$, $B = (b_{j,k})_{\substack{1\le j\le p\\1\le k\le q}}$, $C = (c_{j,k})_{\substack{1\le j\le p\\1\le k\le q}}$, $D = A\times B = (d_{i,k})_{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le q}}$

$E = A\times C = (e_{i,k})_{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le q}}$ et $F = A\times(\alpha B + \beta C) = (f_{i,k})_{\substack{1\le i\le n\\1\le k\le q}}$.

On a : $\forall (i,k)\in [\![1, n]\!]\times[\![1, q]\!]$, $f_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}(\alpha\, b_{j,k} + \beta\, c_{j,k}) = \alpha \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, b_{j,k} + \beta \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\, c_{j,k} = \alpha\ d_{i,k} + \beta\ e_{i,k}$

D'où : $A\times(\alpha B + \beta C) = \alpha\ A\times B + \beta\ A\times C$. De même pour la linéarité à gauche

Propriété 3: Soit $E_{i,j}$ la matrice élémentaire d'indice (i,j) dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $E'_{k,v}$ la matrice élémentaire d'indice (k,v) dans $\mathcal{M}_{p,q}(K)$.
Alors $E_{i,j}\times E'_{k,k'} = \delta_{j,k}\, E''_{i,k'}$ où $E''_{i,k'}$ la matrice élémentaire d'indice (i,k') dans $\mathcal{M}_{p,q}(K)$

Dem: On note : $E_{i,j} = (a_{u,v})_{\substack{1\le u\le n\\1\le v\le p}}$ avec $a_{u,v}$ valant 1 si (u,v) = (i,j), 0 sinon ,

$E'_{k,k'} = (b_{v,t})_{\substack{1\le v\le p\\1\le t\le q}}$ avec $b_{v,t}$ valant 1 si (v,t) = (k,k'), 0 sinon et $C = E_{i,j}\times E'_{k,k'} = (c_{u,t})_{\substack{1\le u\le n\\1\le t\le q}}$

$\forall (u,t)\in [\![1, n]\!]\times[\![1, q]\!]$, on a : $\sum_{v=1}^{p} a_{u,v}\, b_{v,t} = a_{u,j}\, b_{j,t}$ car pour tout $v\ne j$, $a_{u,v} = 0$.

Or : * si $j\ne k$, tous les $b_{j,t}$ sont tous nuls : Ainsi si $j\ne k$, C est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,q}(K)$

* si j = k. $a_{u,j}\, b_{j,t} = a_{u,j}\, b_{k,t}$ est nul dés que $u\ne i$ ou $t\ne k'$, et il vaut 1 si (u,t) = (i,k'). Ainsi $C = E''_{i,k'}$

En regroupant les deux cas, on trouve bien : $E_{i,j}\times E'_{k,k'} = \delta_{j,k}\, E''_{i,k'}$

Définition: On appelle **matrice unité I_n**, la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf les éléments diagonaux qui valent 1: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Théorème: ($\mathcal{M}_n(K)$, +, ×) est un anneau.

Dem: Pour ce qui est de la structure de groupe, on sait que $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est un espace vectoriel, donc $\mathcal{M}_n(K)$ aussi. Pour le produit, on vérifie que la matrice I_n est l'élément neutre de la multiplication. Les autres axiomes devant être vérifié par ce produit proviennent de l'associativité de la bilinéarité.

Remarque : Ce n'est pas un anneau commutatif (si $n \geq 2$).
Il y a également des diviseurs de zéros, des matrices non nulles de produit nul.

Exemples: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Si $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ alors $C \times C = C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On dit que C est nilpotente.

Formule du binôme

Propriété : Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $A \times B = B \times A$. Alors :

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} A^k \, B^{p-k} \quad \text{avec la convention : } A^0 = I_n = B^0$$

Dem: On procède par récurrence sur n…

Groupe linéaire

Définition: Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On dit que A est une **matrice inversible** sssi $\exists\, B \in \mathcal{M}_n(K) \mid A \times B = B \times A = I_n$ On note alors $B = A^{-1}$ et on l'appelle inverse de A.

Théorème: L'ensemble $Gl_n(K)$ des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$ est un groupe.

Dem: I_n est inversible donc cet ensemble est non vide.
Le produit est une loi interne car l'inverse de $A \times B$ est $B^{-1} \times A^{-1}$ si A et B sont inversibles.
Le produit est associatif et admet un élément neutre I_n. Enfin l'inverse d'une matrice inversible est inversible.

III) Quelques sous-espaces de $\mathcal{M}_n(K)$

Définition: On appelle **matrice scalaire**, une matrice de la forme λI_n où $\lambda \in K$

Définition: On appelle **matrice diagonale**, une matrice dont tous les éléments non diagonaux sont nuls. On note $D_n(K)$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n.

Définition: On appelle **matrice triangulaire supérieure**, une matrice dont tous les éléments $a_{i,j}$ où $i > j$ sont nuls. On note $T_n^S(K)$ l'ensemble de ces matrices.

Définition: On appelle **matrice triangulaire inférieure**, une matrice dont tous les éléments $a_{i,j}$ où $i < j$ sont nuls. On note $T_n^i(K)$ l'ensemble de ces matrices.

Propriété: L'ensemble $\mathcal{D}_n(K)$ des matrices diagonales est un sous anneau de $\mathcal{M}_n(K)$

Dem: I_n est une matrice diagonale et on a stabilité de $\mathcal{D}_n(K)$ par la somme, le produit et la multiplication par – 1. Donc $\mathcal{D}_n(K)$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(K)$.

Propriété: $T_n^s(K)$ est un sous-anneau non commutatif de $\mathcal{M}_n(K)$ contenant $\mathcal{D}_n(K)$.

Dem: I_n est une matrice triangulaire supérieure et on a stabilité de $T_n^s(K)$ par la somme et la multiplication par – 1. Il reste à vérifier la stabilité par le produit.

Soient alors T et R deux éléments de $T_n^s(K)$ et soit S = T R. On a $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $s_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} t_{i,k} r_{k,j}$.

Pour i>j on a : $s_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} t_{i,k} r_{k,j} + \sum_{k=i}^{n} t_{i,k} r_{k,j}$ Or si i>k, $t_{ik} = 0$ et si $k \geq i$, on a k>j donc $r_{kj} = 0$.Aussi si i>j on a $s_{ij} = 0$. Ainsi $S \in T_n^s(K)$.

Corollaire: $T_n^i(K)$ est un sous-anneau non commutatif de $\mathcal{M}_n(K)$ contenant $\mathcal{D}_n(K)$

Dem: On refait la démonstration de la même façon qu'au dessus.

Remarque : Ces trois ensembles sont aussi des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(K)$.

IV) Transposée d'une matrice

Définition: Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. On appelle **transposée** de la matrice A, la matrice ${}^tA = (b_{h,k})_{(h,k)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ telle que $\forall (h,k)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]$, $b_{h,k} = a_{k,h}$
C'est la matrice obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A

Exemples: Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = A^T$

Proposition: (i) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, alors ${}^t({}^tA) = A$
(ii) Si $(A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)^2$, alors ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
(iii) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $\lambda \in K$, alors ${}^t(\lambda\cdot A) = \lambda\cdot{}^tA$
(iv) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$, ${}^t(A\times B) = {}^tB \times {}^tA$

Dem: **(i)** Soient $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, $B = {}^tA = (b_{h,k})_{(h,k)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]}$ et $C = {}^tB = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.
On a $\forall (h,k)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]$, $b_{h,k} = a_{k,h}$ et $c_{k,h} = b_{h,k}$. Aussi $A = C$.

(ii) et **(iii)** $\lambda\cdot A + B = (\lambda\ a_{i,j} + b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$
D'où ${}^t(\lambda\cdot A + B) = (\lambda\ a_{j,i} + b_{j,i})_{(j,i)} = \lambda\,(a_{j,i})_{(j,i)} + (b_{j,i})_{(j,i)} = \lambda\cdot({}^tA) + ({}^tB)$.
On applique ce résultat avec $\lambda=1$ pour le (ii) et B égale à la matrice nulle pour le (iii).

(iv) On note $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, $B = (b_{h,k})_{(h,k)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,q]\!]}$, $C = A\times B = (c_{i,k})_{(i,k)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!]}$.
${}^tA = (a'_{j,i})_{(j,i)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]}$, ${}^tB = (b'_{k,h})_{(k,h)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,p]\!]}$, $C' = ({}^tB)\times({}^tA) = (c'_{i,k})_{(k,i)\in[\![1,q]\!]\times[\![1,n]\!]}$

On a $c'_{k,i} = \sum_{j=1}^{p} b'_{k,j}\,a'_{j,i} = \sum_{j=1}^{p} b_{j,k}\,a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\,b_{j,k} = c_{i,k}$. D'où $C' = {}^tC$

Définition: L'application de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ vers $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ qui à une matrice fait correspondre sa transposée s'appelle la **transposition**.

Les propriétés précédentes traduisent le fait que la transposition est une application linéaire involutive et qu'elle transforme un produit en un produit "inversé".

Théorème: Si $A \in Gl_n(K)$, alors ${}^tA \in Gl_n(K)$ et on a $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.
Dem: ${}^t(A^{-1}) \times ({}^tA) = {}^t(A^{-1}\times A) = {}^t(I_n) = I_n$

B) MATRICES ET APPLICATIONS LINEAIRES

I) Matrice d'une application linéaire dans des bases

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E
Soit $\mathcal{F} = (f_1,\dots,f_p)$ une famille de vecteurs de E

Définition: On appelle **matrice de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$** la matrice d'ordre (n,p) dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est constituée des coordonnées de f_j dans la base $\mathcal{B}$. On la note $Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases

Soient E un espace vectoriel de dimension p et $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de E
Soient F un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ une base de F
Soit f une application linéaire de E vers F.

Définition: On appelle **matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ de E et la base $\mathcal{C}$ de F** la matrice d'ordre (n,p) dont la $j^{\text{ième}}$ colonne est constituée des coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \\ \varepsilon_n \end{array}$$ où $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $f(e_k) = a_{1,k}\,\varepsilon_1 + a_{2,k}\,\varepsilon_2 + \ldots + a_{n,k}\,\varepsilon_n$

Remarque: La matrice dépend de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{C}$

Exemple: Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2) \mid P \to (P(0), P(1))$, $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et si $\mathcal{B} = (I, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (X^2, X - X^2, X^2 - 2X + I)$ des bases de $\mathbb{R}_2[X]$ on a:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Définition: Si $\mathcal{B}$ est une base de E et f un endomorphisme de E, on appelle **matrice de f dans la base $\mathcal{B}$** la matrice carrée d'ordre n $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$

Théorème: Soit E et F deux K-ev de dimension p et n et $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des bases de E et F. L'application $\varphi : L(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}(K)$ qui à f associe $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est un isomorphisme.

Dem: On pose $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_p)$ pour la base de E, et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ pour la base de F.
Soit $f \in L_K(E,F)$. f est caractérisée de manière unique par la donnée des images des vecteurs de la base canonique de K^p : les $f(e_j)$. Plus précisément si on a:
$\forall k \in [\![1,p]\!]$, $f(e_k) = a_{1,k}\,\varepsilon_1 + a_{2,k}\,\varepsilon_2 + \ldots + a_{n,k}\,\varepsilon_n$ et si $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_p e_p$,

alors $f(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\,\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} x_j\, a_{i,j}\right) \varepsilon_i$

On adopte alors la notation matricielle suivante:
On pose X la matrice colonne dont les coefficients sont les coordonnées de x dans $(e_1,\ldots, e_p)$.
On pose Y la matrice colonne dont les coefficients sont les coordonnées de y dans $(\varepsilon_1,\ldots, \varepsilon_n)$.

On pose $A = (a_{i,j})_{i,j}$ c'est-à-dire: $$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \\ \varepsilon_n \end{array}$$

Remarque: Si on a $y = f(x)$ alors on a : $Y = A X$, car la $i^{\text{ième}}$ coordonnée de Y est : $y_i = a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + \ldots + a_{i,p}\,x_p$

Réciproquement, si on se donne une matrice $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \ddots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}$, on sait qu'il y a une et une seule application linéaire $f \in L_K(E, F)$ telle que, si $\mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_p)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$, $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $f(e_j) = m_{j,1}\,\varepsilon_1 + \ldots + m_{j,n}\,\varepsilon_n$.
Soit alors $\varphi : L_K(E, F) \to \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $f \to A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. On vient de voir que φ est une bijection.
On vérifie aisément que c'est aussi une application linéaire.
Ainsi on a un **isomorphisme** de $L_K(E, F)$ vers $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Matrice d'une composée

Soient E, F et G 3 K-ev de dimensions respectives q, p et n. Soient $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F,G)$. On considère $h = g \circ f$. Soient les bases $\mathcal{B} = (e_1,\ldots, e_q)$ de E, $\mathcal{C} = (v_1, \ldots, v_p)$ de F et $\mathcal{D} = (\varepsilon_1,\ldots, \varepsilon_n)$ de G . On note :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ddots & b_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p,1} & b_{p,2} & \cdots & b_{p,q} \end{pmatrix} \text{ et } C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(h) = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,q} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \ddots & c_{2,q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,q} \end{pmatrix}$$

On veut exprimer $h(e_k)$ en fonction des ε_j . On a

$$\mathrm{gof}(e_k) = g\left(\sum_{i=1}^{p} b_{i,k}\, v_i\right) = \sum_{i=1}^{p} b_{i,k}\, g(v_i) = \sum_{i=1}^{p} b_{i,k} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\, \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} a_{j,i}\, b_{i,k}\right)\varepsilon_j = \sum_{j=1}^{n} c_{j,k}\varepsilon_j \text{ où } c_{j,k} = \sum_{i=1}^{p} a_{j,i}\, b_{i,k}$$

On a alors : $A \times B = C$.

Théorème: Soit E, F et G trois K-ev de dimension q, p et n et $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des bases de E, F et G. Soit $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$. Alors : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f)$.

Matrice d'un isomorphisme

Théorème: Soit E et F deux K-ev de dimension finie avec dim(E) = dim(F) et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F. Soit $f \in L(E, F)$. Alors : f est un isomorphisme ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ est inversible.

Dem: On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Si f est un isomorphisme On note $g = f^{-1}$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g)$.

On a : $A \times B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_F) = I_n$ Ainsi A est inversible.

Si Aest inversible On considère g telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g) = A^{-1}$

On a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f \circ g) = A \times A^{-1} = I_n = A^{-1} \times A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f)$. Ainsi $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ donc f est bijective.

II) Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Application linéaire canoniquement associée à une matrice

On se donne une matrice $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,p} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \ddots & m_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix}$, on sait qu'il y a une et une seule application linéaire $f \in L_K(K^p, K^n)$ telle que, si $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ sont les bases canoniques respectives de K^p et K^n, $\forall j \in \{1,..,p\}$, $f(e_j) = m_{j,1}\, \varepsilon_1 + \ldots + m_{j,n}\, \varepsilon_n$.

Cette application est appelée **application linéaire canoniquement associée à M**

Définition: Soit A une matrice.

On appelle **noyau de A** le noyau de son application linéaire canoniquement associée.

On appelle **image de A** l'image de son application linéaire canoniquement associée.

On appelle **rang de A** le rang de son application linéaire canoniquement associée.

Propriété : Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Alors :

- **Im(A) est engendrée par les vecteurs colonnes de A**
- **$\ker(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in K^p \mid \forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,1}\, x_1 + \ldots + a_{i,p}\, x_p = 0 \right\}$**

Dem: On note u l'application linéaire canoniquement associée à A et $(e_1,\ldots,e_p)$ la base canonique de K^p.

Alors : $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_p)) = \mathrm{vect}(C_1, C_2, \ldots, C_p)$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in K^p$. $X \in \ker(A) \Leftrightarrow A\,X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,1}\, x_1 + \ldots + a_{i,p}\, x_p = 0$

Propriété : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Alors : A est inversible sssi $\ker(A) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Dem: On note u l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors :

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow u \text{ est un automorphisme} \Leftrightarrow u \text{ est injective} \Leftrightarrow \ker(u) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire

Théorème: Soit $A \in T_n^s(K)$. Alors A inversible ssi aucun coefficient diagonal n'est nul.

Dem: Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A. On appelle $(e_1,\dots, e_n)$ la base canonique de K^n et $\varepsilon_i = f(e_i) = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2+\dots+a_{ii}e_i$ (les autres termes sont nuls…)

- Si tous les a_{ii} sont non nuls. Soit $(\lambda_1,\dots, \lambda_n)$ tels que $\lambda_1\varepsilon_1+\dots+\lambda_n\varepsilon_n = 0$. Dans cette somme le terme en e_n ne peut provenir que de $\lambda_n\varepsilon_n$ et vaut $\lambda_n a_{nn}$. Or $a_{nn}\neq 0$, donc $\lambda_n=0$. Aussi on a: $\lambda_1\varepsilon_1+\dots+\lambda_{n-1}\varepsilon_{n-1}=0$. En considérant le terme en e_{n-1} on montre que $\lambda_{n-1}=0$ et on réitère le procédé. Aussi la famille $(\varepsilon_1,\dots, \varepsilon_n)$ est libre donc c'est une base donc f est un automorphisme et A est inversible.
- Si $\exists$i tel que $a_{ii}=0$. On a alors $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_i) \in \text{vect}(e_1,\dots,e_{i-1})$ car le seul vecteur qui aurait pu s'écrire à l'aide de e_i est ε_i (car A triangulaire supérieure), mais celui n'a pas de terme en e_i car $a_{ii}=0$. Donc $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_i)$ est liée et donc $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ est liée comme sur-famille d'une famille liée. Ainsi f n'est pas injective donc A n'est pas inversible.

Remarque: * On obtient la même condition pour les matrices triangulaires inférieures.

** Pour une matrice quelconque, l'inversibilité ne se traduit pas en terme d'éléments diagonaux:

Exemples: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible mais pas $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème: Soit $A \in T_n^s(K)$ inversible. Alors A^{-1} est triangulaire supérieure

Dem: Soit θ l'application définie sur $T_n^s(K)$ par : $\forall M \in T_n^s(K)$, u(M) = A M.

- u est une application linéaire de $T_n^s(K)$ vers $T_n^s(K)$ car $T_n^s(K)$ est stable par produit.
- Soit $M \in T_n^s(K)$. $M \in \ker(u) \Leftrightarrow AM = 0_n \Leftrightarrow A^{-1} A M = 0_n \Leftrightarrow M = 0_n$: ainsi u est injective. Or $T_n^s(K)$ est un espace de dimension finie, donc u est un automorphisme.

En particulier, il existe un élement B de $T_n^s(K)$ tel que $u(B) = I_n$ i.e. tel que $AB = I_n$. B est alors l'inverse de A et est triangulaire supérieure.

III) Matrice par blocs

Matrice par blocs

Soit n, m, p et q 4 entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B \in \mathcal{M}_{n,q}(K)$, $C \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$, $D \in \mathcal{M}_{m,q}(K)$. On peut définir la matrice à n + m lignes et p + q colonnes $\begin{pmatrix} (A) & (B) \\ (C) & (D) \end{pmatrix}$.

Plus généralement, on peut définir les matrices par blocs $\begin{pmatrix} (A_{1,1}) & (A_{1,2}) & (\cdots) & (A_{1,p}) \\ (A_{2,1}) & (A_{2,2}) & (\ddots) & (A_{2,p}) \\ (\vdots) & (\vdots) & (\ddots) & (\vdots) \\ (A_{n,1}) & (A_{n,2}) & (\cdots) & (A_{n,p}) \end{pmatrix}$

Lorsqu'une matrice par blocs est donnée, les blocs d'une même colonne correspondent aux matrices des restrices de l'application linéaire canoniquement associée à des sous-espaces en somme directe.

Produit par blocs

Théorème: Soit M = $\begin{pmatrix} (A) & (B) & (C) \\ (D) & (E) & (F) \end{pmatrix}$ et M' = $\begin{pmatrix} (A') & (B') \\ (C') & (D') \\ (E') & (F') \end{pmatrix}$ deux matrices par blocs

Alors M M' = $\begin{pmatrix} (AA'+BC'+CE') & (AB'+BD'+CF') \\ (DA'+EC'+FE') & (DB'+ED'+FF') \end{pmatrix}$

Dem: Admis. Evidemment, ce résultat se généralise à des matrices par blocs de dimensions compatibles.

C) CHANGEMENTS DE BASES, EQUIVALENCE ET SIMILITUDE

I) Changements de bases

Matrice de changement de bases

Définition: Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$** la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$. On la note $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

Interprétations: **1ère interprétation**: La matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ peut être considérée comme la matrice d'un automorphisme : celui qui change les vecteurs de $\mathcal{B}$ en ceux de $\mathcal{C}$. Ainsi $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est inversible

2nde interprétation: E est rapporté successivement à $\mathcal{C}$ puis à $\mathcal{B}$. On constate que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E)$ est la matrice des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des images par Id_E des vecteurs de la base $\mathcal{C}$. Donc $\mathbf{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathbf{Id}_E) = \mathbf{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

En particulier, l'inverse de $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$

Théorème: Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. Alors $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est inversible d'inverse $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$

Formules de changement de bases

Propriété: Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$. Soit x un élément de E. Soient X_1 et X_2 les matrices de ses coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors on a: $\boxed{X_1 = P X_2}$. (On a les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles)

Dem: On a : $x = \mathrm{Id}(x)$. $X_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(x)$ Donc : $X_1 = P X_2$

Propriété: *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de F, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. Soit $f \in L(E,F)$, on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$. Alors $A' = Q^{-1} A P$

**** En particulier si $f \in L(E)$, si $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ et $\mathcal{C}' = \mathcal{B}'$, alors $A' = P^{-1} A P$**

Dem: On a , en utilisant l'interprétation matricielle d'une composée d'applications linéaires :
$A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_F) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}(\mathrm{Id}_E) = Q^{-1} A P$

II) Matrices équivalentes et rang

Matrices équivalentes

Définition: Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. On dit que A et B sont des **matrices équivalentes** si il existe deux matrices inversibles U et V telles que
$B = U A V$

Interprétation géométrique : Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représententent la même application linéaire dans des bases différentes.

Caractérisation des matrices de rang r

Théorème : Soit E et F deux K-ev de dimension finie, p = dim(E), n = dim(F). Soit $u \in L(E,F)$. On suppose que u est de rang r. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F telles que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = J_r = \begin{pmatrix} (I_r) & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$ où I_r est la matrice unité d'ordre r.

Dem: On a rg(u) = r et , d'après le théorème du rang, dim(ker(u)) = p – rg(u) = p – r.
On prend une base de (p-r) vecteurs de ker(u) : $\varepsilon_{r+1}, \varepsilon_{r+2}, \ldots, \varepsilon_p$. On complète cette famille par r vecteurs pour avoir une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_p)$ de E.

On pose $\varepsilon'_1 = u(\varepsilon_1)$, ..., $\varepsilon'_r = u(\varepsilon_r)$. Comme , $\forall i \in \{1,..,p-r\}$ $u(\varepsilon_{r+i}) = 0$, on en déduit que $(\varepsilon'_1, ..., \varepsilon'_r)$ engendre Im(u) et ainsi $(\varepsilon'_1, ..., \varepsilon'_r)$ est une famille libre de F : on peut la compléter en une base $\mathcal{C}$ de F. La matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est $J_r = \begin{pmatrix} (I_r) & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$

Théorème : Caractérisation des matrices de rang r Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à la matrice J_r de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Dem: Le théorême précédent affirme que l'application linéaire canoniquement associée à A peut être représentée par la matrice J_r , et donc que A et J_r sont équivalentes.

Réciproquement si $A = U J_r V$, $rg(A) = rg(J_r) = r$ par invariance du rang par composition par un isomorphisme.

Remarque : Dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$, soit la relation $\mathcal{R}$ définie par : $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow$ A et B sont équivalentes.

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence sont les ensembles des matrices d'un rang donné, rang qui caractèrise la classe d'équivalence.

Théorème : Invariance du rang par transposition Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(K)$. Alors : $rg(A) = rg({}^tA)$

Dem: $rg(A) = r \Leftrightarrow \exists(U,V)$ inversibles | $A = U J_r V$ $\Leftrightarrow$ $\exists(U,V)$ inversibles | ${}^tA = {}^tV\, {}^tJ_r\, {}^tU$

$\Leftrightarrow \exists(U',V')$ inversibles | ${}^tA = U' J'_r V'$ avec $J'_r = (b_{i,j}) \in M_{p,n}(K)$ telle que $b_{i,j} = 1$ ssi $i = j \le r$.

D'où $rg(A) = r \Leftrightarrow rg({}^tA) = r$ Ainsi $rg({}^tA) = rg(A)$

Matrices extraites

Définition: Soit $A\in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Une **matrice extraite** de A est une matrice B telle que : il existe I une famille croissante d'éléments de $[\![1,n]\!]$, il existe J une famille croissante d'éléments de $[\![1,p]\!]$ avec B matrice formée par les intersections des lignes L_i et des colonnes C_j de A, avec i dans I et j dans J.

Exemples: Si $A = \begin{pmatrix} 2&5&3&1&6&7 \\ 4&1&5&6&8&9 \\ 1&0&4&5&1&3 \\ 7&9&6&2&1&5 \\ 1&5&8&2&7&4 \end{pmatrix}$, I = (1, 3 4) et J = (2, 3, 5, 6), alors $B = \begin{pmatrix} 5&3&6&7 \\ 0&4&1&3 \\ 9&6&1&5 \end{pmatrix}$

Théorème : a) Si B est une matrice extraite de A, alors $rg(B) \leqslant rg(A)$
b) rg(A) est l'ordre maximum d'une matrice carrée inversible extraite de A

Dem: a) Si on enleve des colonnes à une matrice A, l'espace engendré par les vecteurs colonnes restants est inclus dans l'espace engendré par les vecteurs colonnes de la matrice A. Donc si D est une matrice obtenue à partir de A en enlevant des colonnes, on a : $rg(D) \leqslant rg(A)$. En constatant que le rang est invariant par transposition, il en est de même si on enlève des lignes à une matrice. Ainsi si B est extraite de A, $rg(A) \leqslant rg(B)$.

b) Soit $r = rg(A)$. On extrait de A la matrice constituée par r vecteurs colonnes générateurs de Im(A). On obtient une matrice B de rang r à n lignes et r colonnes. La matrice ${}^tB$ est à r lignes et n colonnes et de rang r. On peut donc en extraire une matrice C à r lignes et r colonnes de rang r. Mais alors la matrice ${}^tC$ est une matrice extraite de A à r lignes et r colonnes et de rang r donc inversible. Ainsi rg(A) est un ordre d'une matrice carrée inversible extraite de A. Mais d'après le a), toute matrice carrée inversible extraite de A est de rang inférieure à rg(A). D'où le résultat annoncé.

III) Matrices semblables et trace

Matrices semblables

Définition: Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$. On dit que A et B sont des **matrices semblables** si il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1} A P$

Interprétation géométrique : Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Trace d'une matrice carrée

Définition: Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in\mathcal{M}_n(K)$. On appelle **trace de A** et on note tr(A) ou Tr(A), la somme des coefficients diagonaux de A : $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

Propriété: **L'application $\mathcal{M}_n(K) \to K$, $A \to tr(A)$ est une forme linéaire.**

Dem: Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ deux matrices carrées d'ordre n et $(\alpha, \beta)\in K^2$

$$tr(\alpha A + \beta B) = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha a_{i,i} + \beta b_{i,i}\right) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \alpha\, tr(A) + \beta\, tr(B)$$: tr est bien linéaire

Propriété: **$\forall A\in\mathcal{M}_{n,p}(K)$, $\forall B\in\mathcal{M}_{p,n}(K)$ on a $tr(A\times B) = tr(B\times A)$.**

Dem: Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $B = (b_{j,k})_{(j,k)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!]}$

On pose $A\times B = C = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, b_{k,j}$ et $B\times A = D = (d_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$ où $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\, a_{k,j}$ On a :

$$tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, b_{k,i}\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,i}\right) = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}\, a_{i,k}\right) = \sum_{k=1}^{p} d_{k,k} = tr(D)$$

Propriété : Invariance de la trace par la similitude **Soit A et B deux matrices carrées semblables. Alors A et B ont la même trace**

Dem: Il existe une matrice P inversible telle que $B = P^{-1} A P$.
$tr(B) = tr(P^{-1} A P) = tr((P^{-1} A) P) = tr(P (P^{-1} A)) = tr(A)$

Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie

Propriété: **Soit E un K-ev de dimension finie n. Soit $u\in L(E)$. Alors pour toutes bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E, $tr(Mat_{\mathcal{B}}(u)) = tr(Mat_{\mathcal{C}}(u))$**

Dem: Cela provient de l'invariance de la trace d'une matrice carrée par la similitude

Définition: On appelle **trace de l'endomorphisme u**, la valeur commune de $tr(Mat_{\mathcal{B}}(u))$. On la note **tr(u) ou Tr(u)**.

Propriété: **Si E est un K-ev de dimension finie, l'application $L(E) \to K$, $u \to tr(u)$ est une forme linéaire. De plus si u et v sont dans L(E), tr(u v) = tr(v u)**

Dem: Cela provient directement des résultats correspondants sur les traces des matrices carrées.

Propriété: **Soit p un projecteur d'un K-ev de dimension finie. Alors tr(p) = rg(p).**

Dem: Soit $\mathcal{C}$ une base de Im(p) et $\mathcal{D}$ une base de ker(p). La réunion de ces deux familles est une base $\mathcal{B}$ de E. De plus : $Mat_{\mathcal{B}}(p) = J_r = \begin{pmatrix} (I_r) & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$ où r est le rang de p. Donc tr(p) = r = rg(p).

D) OPERATIONS ELEMENTAIRES ET SYSTEMES LINEAIRES

I) Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice

Définition: Les opérations (ou manipulations) élémentaires sur les lignes sont:

1) **les transvections**: addition d'une multiple d'une ligne à une autre: $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$
2) **les dilatations**: multiplication d'une ligne par un scalaire non nul: $L_i \leftarrow \alpha L_i$
3) **les transpositions**: échange de deux lignes: $L_i \leftarrow L_j$ et $L_j \leftarrow L_i$

On définit de même les opérations élémentaires sur les colonnes.

On considère les matrices suivantes: ($m \geqslant 2$) On aura toujours $i \neq j$ et $\alpha \neq 0$

1) $\tau_{i,j} = I_m - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ (matrice de transposition)
2) $D_i(\alpha) = I_m + (\alpha-1) E_{ii}$ (matrice de dilatation)
3) $T_{i,j}(\alpha) = I_m + \alpha E_{ij}$ (matrice de transvection)

Proposition: a) Les matrices précédentes sont inversibles.

b) Par ces matrices, multiplier A à gauche revient à faire subir aux lignes:

multiplier par $\tau_{i,j}$ revient à faire la transposition $L_i \leftarrow L_j$ et $L_j \leftarrow L_i$

multiplier par $D_i(\alpha)$ revient à faire la dilatation $L_i \leftarrow \alpha L_i$

multiplier par $T_{i,j}(\alpha)$ revient à faire la transvection $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$

c) Par ces matrices, multiplier A à droite revient à faire subir aux colonnes:

multiplier par $\tau_{i,j}$ revient à faire la transposition $C_i \leftarrow C_j$ et $C_j \leftarrow C_i$

multiplier par $D_i(\alpha)$ revient à faire la dilatation $C_i \leftarrow \alpha C_i$

multiplier par $T_{i,j}(\alpha)$ revient à faire la transvection $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$

Dem: a) $\tau_{i,j}$ est inversible: elle est sa propre inverse. $D_i(\alpha)$ est inversible d'inverse $D_i(\alpha^{-1})$. Enfin, $T_{i,j}(\alpha)$ est inversible d'inverse $T_{i,j}(-\alpha)$.

b) On vérifie par le calcul que:

$\tau_{i,j}$ A est la matrice obtenue à partir de A par échange des lignes i et j ;
$D_i(\alpha)$ A est la matrice obtenue à partir de A en multipliant la ligne i par α;
$T_{i,j}(\alpha)$ A est la matrice obtenue à partir de A en ajoutant à la ligne i , α fois la ligne j.

c) En passant aux transposés, tout travail sur les colonnes de A revient à faire un travail sur les lignes de ${}^tA$. Pour ces dernières, on multiplie à gauche la matrice ${}^tA$ par une certaine matrice B, donc en revenant aux transposés, on multiplie à droite de A par ${}^tB$. Or si B est une matrice de transposition ou de dilatation ${}^tB = B$, et si B est une matrice de transvection $T_{i,j}(\alpha)$ alors ${}^tB$ est la matrice de transvection $T_{j,i}(\alpha)$.

Propriété : a) Les opérations élémentaires conservent le rang

b) Les opérations élémentaires sur les colonnes conservent l'image

c) Les opérations élémentaires sur les lignes conservent le noyau

Dem: Soit A une matrice et u l'application linéaire canoiquement associée. Une opération élémentaire sur A transforme A en la matrice A' canoniquement associée à u o φ si on a travaillé sur les colonnes ou φ o u si on a travaillé sur les colonnes, avec φ isomorphisme.

a) Par invariance du rang par composition par un isomorphisme, rg(A') = rg(A)
b) Puisque φ est un isomorphisme, Im(u o φ) = Im(u) et ker(φ o u) = ker(u)

Définition: On appelle **matrice échelonnée** une matrice de la forme $E_r = \begin{pmatrix} (T_r) & (X) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$ où T_r est triangulaire supérieure inversible et X est une matrice r lignes et (p-r) colonnes quelconque

Remarque : La matrice E_r est de rang r.

Méthode du pivot de Gauss

On se donne une matrice A.

But: par manipulations élémentaires sur les lignes ou les colonnes, on veut transformer A pour obtenir une matrice échelonnée

On part de A. On considère la première colonne de A:

- Si un des éléments est non nul, par exemple a_{j1} , on permute les lignes L_j et L_1 .

  Puis sur les lignes L_i , $i \geqslant 2$, de la nouvelle matrice $\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$, on effectue les transvections :

  $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a'_{i\,1}}{a'_{1\,1}} L_1$. On obtient une matrice du type $\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1p} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2p} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots a'_{1p} \\ (0) & \begin{pmatrix} A_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

- Si tous les a_{j1} étaient nuls : si sur les colonnes il n'y a également que des 0, on avait déjà une matrice du type voulu, sinon, on échange la colonne C_1 avec une colonne qui n'a pas que des 0
- Puis on réitère le procédé avec la seconde colonne en ne touchant plus à la première ligne (ce qui revient à travailler sur A_1).

Après ces opérations sur les lignes ou les colonnes, on obtient bien une matrice échelonnée.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & 3 & 11 & 7 & -6 \end{pmatrix}$ On a $A \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc rg(A) = 4

Méthode du pivot total

On part cette fois d'une matrice carrée A. Le but est de montrer l'inversibilité de A et de calculer l'inverse de A.

Méthode: On va, par manipulations élémentaires sur **les lignes uniquement**, on veut transformer A d'abord en une matrice triangulaire supérieure inversible puis en la matrice I_n

On part de A. On considère la première colonne de A:

- Si un des éléments est non nul, par exemple a_{j1} , on permute les lignes L_j et L_1 .

  Puis sur les lignes L_i , $i \geqslant 2$, de la nouvelle matrice $\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$, on effectue les transvections :

  $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a'_{i\,1}}{a'_{1\,1}} L_1$. On obtient une matrice du type $\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a''_{22} & \cdots & a''_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots a'_{1n} \\ (0) & \begin{pmatrix} A_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

- Si tous les a_{j1} étaient nuls alors la matrice A n'est pas inversible.
- Puis on réitère le procédé avec la seconde colonne en ne touchant plus à la première ligne (ce qui revient à travailler sur A_1).

Après ces opérations sur les lignes ou les colonnes, on obtient bien une matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$

C'est le pivot partiel qui donne une CNS d'inversibilité: A est inversible $\Leftrightarrow$ T est inversible $\Leftrightarrow$ tous les éléments diagonaux de T sont non nuls.

Si A est inversible, on peut poursuivre la méthode du pivot: c'est le pivot total. On peut, en ajoutant un certain nombre de fois la ligne L_n aux autres lignes, annuler les termes de la colonne C_n sauf celui de la ligne L_n. Puis on fait le même travail avec la colonne C_{n-1} ...

On arrive à $B'_1 \times B'_2 \times \ldots \times B'_q \times B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_k \times A = D$ diagonale avec $D = T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à multiplier D par des matrices de dilatation (transformant la matrice D en I_n)

On obtient donc $B''_1 \times B''_2 \times \ldots \times B''_p \times B'_1 \times B'_2 \times \ldots \times B'_q \times B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_k \times A = I_n$. Aussi l'inverse de A est $B''_1 \times B''_2 \times \ldots \times B''_p \times B'_1 \times B'_2 \times \ldots \times B'_q \times B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_k$. Pour récupérer cette matrice, il suffit de faire subir à I_n les mêmes opérations que celles subies par A et ce depuis le départ.

Remarque: Il convient de noter que les opérations ne doivent s'appliquer qu'aux lignes pour ne multiplier la matrice que d'un coté : si on obtenait après opérations deux matrices B et C telles que $B \times A \times C = I_n$, on pourrait en déduire que A est inversible , mais son inverse ne serait pas $B \times C$ i.e. la matrice obtenue en effectuant sur I_n les mêmes opérations que sur A.

Par contre, on peut n'effectuer que des opérations sur les colonnes et obtenir l'inverse de A.

Exemple, disposition pratique: Soit à déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On écrit à coté la matrice I_3 et on commence la méthode du pivot:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ (A est inversible)}$$

$$\leftrightarrow (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow (L_1 \leftarrow L_1 - {}^1/_2\, L_2 ,\ L_2 \leftarrow {}^1/_2\, L_2) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

A est inversible d'inverse : $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Exemple2: On veut déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftrightarrow_{(L_3 \leftarrow L_3 - L_1,\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow_{(L_2 \leftarrow L_4,\ L_4 \leftarrow L_3,\ L_3 \leftarrow L_2 - 2L_4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 7 & 4 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow_{(L_3 \leftarrow L_4,\ L_4 \leftarrow 5L_4 + L_3)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\leftrightarrow_{(L_1 \leftarrow 4L_1 - L_4,\ L_2 \leftarrow 4L_2 + L_4,\ L_3 \leftarrow 8L_3 + 3L_4)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 0 & -7 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -5 & -3 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right) \text{ Puis } L_2 \leftarrow L_2 - L_3 :$$

On trouve $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 & -4 \\ -4 & 4 & 4 & 0 \\ -5 & -3 & -7 & 6 \\ 1 & -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

II) Systèmes linéaires

Définition: Un **système** d'équations linéaires est un système de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + \dots + a_{1,p}\, x_p = b_1 \\ a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + \dots + a_{2,p}\, x_p = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n,1}\, x_1 + a_{n,2}\, x_2 + \dots + a_{n,p}\, x_p = b_n \end{cases}$$

. Les éléments $a_{k,i}$ sont les **coefficients**, les éléments b_k forment le **second membre**, les x_i sont les **inconnues**.

Le système (S) est dit **à n équations et à p inconnues.**

On appelle **système homogène associé à (S)** le système (S^*) ayant les mêmes coefficients mais où le second membre est nul

Le but : Trouver l'ensemble des familles solutions (qui peut être vide).

Trois interprétations :

1) A l'aide des vecteurs de K^n

1. Soit $E = K^n$, $V_1 = \begin{pmatrix} a_{1\,1} \\ \vdots \\ a_{n\,1} \end{pmatrix}$, …, $V_p = \begin{pmatrix} a_{1\,p} \\ \vdots \\ a_{n\,p} \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Résoudre le système (S) consiste à chercher les combinaisons linéaires des V_k donnant W.

Si on note $F = \text{vect}(V_1,..,V_p)$, on obtient la discussion : $\boxed{\mathbf{W \in F \Leftrightarrow (S) \text{ admet des solutions}}}$

2) A l'aide des formes linéaires sur K^p

Soit $(\varphi_i)_{1\le i\le p}$ les formes linéaires sur K^p définies par : si $x = (x_1, .. ,x_p)$, $\varphi_i(x) = a_{i,1}\, x_1 + a_{i,2}\, x_2 + .. + a_{i,p}\, x_p$.

$$\boxed{x \text{ solution de (S)} \Leftrightarrow \forall i \in\{1,..,n\},\ \varphi_i(x) = b_i \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(\{b_i\})}$$

L'ensemble des solutions est donc l'intersection d'hyperplans affines

3) A l'aide d'une application linéaire

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,p} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $\boxed{(x_1, .., x_p) \text{ est solution de (S)} \Leftrightarrow AX = B}$

Si on considère u l'application linéaire associée à A et si x est l'élément de K^p de matrice X et si b est l'élément de K^n de matrice B, alors $\boxed{x \text{ solution de (S)} \Leftrightarrow u(x) = b \Leftrightarrow x \in u^{-1}(\{b\})}$

III) Résolution et discussion avec $AX = B \Leftrightarrow u(x) = b$

Définition: Le **rang** d'un système (S) est égal au rang de sa matrice A

1) Nature de l'ensemble des solutions :

Théorème: Les solutions du système linéaire homogène (S^*) associé à (S) forment un sous-espace vectoriel de K^p de dimension p-r : ker(u).

Dem: Les solutions y de (S^*) sont les éléments de ker(u).

Théorème: L'ensemble des solutions du système linéaire (S) est soit vide soit un sous-espace affine de K^p de dimension p-r de direction ker(u).

Dem: Soit (S) n'a pas de solution CQFD. Soit (S) admet une solution x_0.

Auquel cas, x est solution de (S) $\Leftrightarrow$ $x- x_0$ solution de (S^*) $\Leftrightarrow x \in x_0 + \ker(u)$

2) Système de Cramer:

Définition: Un système (S) est dit de **Cramer** $\Leftrightarrow$ (S) est un système carré de n équations à n inconnues de rang n

Théorème: Un système de Cramer possède une et une seule solution

Dem: $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

Résolution des systèmes de Cramer triangulaires:

Si A est inversible et triangulaire supérieure.

$$\text{On a } \begin{cases} a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \cdots + a_{1\,n-1}x_{n-1} + a_{1\,n}x_n = b_1 \\ \quad a_{2\,2}x_2 + \cdots + a_{2\,n-1}x_{n-1} + a_{2\,n}x_n = b_2 \\ \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1\,n}x_n = b_{n-1} \\ \qquad\qquad a_{n\,n}x_n = b_n \end{cases}.$$

La ligne L_n donne $x_n = \dfrac{b_n}{a_{n\,n}}$ avec $a_{n,n} \neq 0$ car (S) est de Cramer.

On remplace alors dans la ligne L_{n-1} qui donne : $x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1,\,n}\,x_n}{a_{n-1,\,n-1}}$

On réitère : On obtient pour le premier : $x_1 = \dfrac{b_1 - \left(a_{1\,2}\,x_2 + \cdots + a_{1\,n-1}\,x_{n-1} + a_{1\,n}\,x_n\right)}{a_{1\,1}}$

Utilisation de la méthode du pivot de Gauss:

On reprend pas à pas la méthode d'inversion par opérations élémentaires sur les lignes c'est-à-dire que l'on fait subir au second membre B toutes les opérations élémentaires subies par les lignes de A tendant à trigonaliser le système.

Exemple: Soit à résoudre (S) : $\begin{cases} x + y = a \\ 2y + 2z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$

On a (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ 2y + 2z = b \\ z = c - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a \\ y = a + \frac{b}{2} - c \\ z = c - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = c - \frac{b}{2} \\ y = a + \frac{b}{2} - c \\ z = c - a \end{cases}$

Remarquer que l'on peut en déduire l'inverse de la matrice A...