MPSI 14-15 Feuille n° 21 : Matrices   Du 20/03/15 au 04/04/15

Exercice 1. Noyau, image de l'application $u : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto MA - AM$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Par la méthode du pivot de Gauss, déterminer l'inversibilité et calculer l'inverse de :
$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 11 & 8 \end{pmatrix}$

Exercice 3. Soient :
$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, x + y, 2x)$.
Montrer que f est linéaire, que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, et déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$

Exercice 4. Déterminer la matrice dans la base canonique de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (y + z, x + z, x + y)$.

Exercice 5. Soit E l'espace des fonctions sur $\mathbb{R}$ engendrées par $\mathscr{S} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ où :
$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = e^x$ et $f_4(x) = xe^x$. Soit u l'application définie sur E par : $u(f) = f'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E
2. Montrer que $\mathscr{S}$ est une base de E
3. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathscr{S}$

Exercice 6. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
On appelle trace de A et on note $tr(A)$ la valeur : $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$

1. Montrer que tr, l'application qui à une matrice A associe sa trace, est une forme linéaire
2. Montrer que : $\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2, tr(AB) = tr(BA)$.
   A-t-on $tr(AB) = tr(A) \times tr(B)$ et $tr(ABC) = tr(ACB)$?
3. Montrer que si A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, alors on a : $tr(A) = tr(B)$
4. Montrer que si $AB - BA = A$ alors A n'est pas inversible.
5. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B telles que : $AB - BA = I_n$

Exercice 7. Déterminer les rangs des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1+x \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{C}$

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe trois suites (à déterminer) $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \alpha_n I_3 + \beta_n A + \gamma_n A^2$

Exercice 9. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. $\begin{cases} 3x+y &= 0 \\ 6x+2y+z &= 2 \\ 9x+3y+7z &= 14 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x-3y+z &= 1 \\ 2x+y-z &= -1 \\ x+11y-5z &= 5 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x+y-2z &= 10 \\ 3x+2y+2z &= 1 \\ 5x+4y+3z &= 4 \end{cases}$

Exercice 10. Déterminer le noyau, l'image et la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z,t) \mapsto (z, x+y+z-t, x+z)$.

Exercice 11. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est
$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R} \big| \exists y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}\,; u(y) = \lambda y$. On dit alors que λ est une valeur propre de u et que y est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.
   On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les 3 valeurs propres trouvées. On note f_1, f_2, f_3 des vecteurs propres associés.
2. Montrer que $\mathscr{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Trouver la matrice D de u dans la base $\mathscr{C}$.
4. On pose $P = mat_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$. Déterminer une relation entre A, D, P et P^{-1}
5. Calculer A^n

Exercice 12. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = \alpha, u_1 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.
Soient $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $X_n = A^n X_0$
2. Résoudre l'équation (E) : $\det(x\, I_2 - A) = 0$
3. Trouver une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
4. Calculer A^n. En déduire une expression de u_n à l'aide de n, α et β.

Exercice 13. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = \alpha, u_1 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
Soient $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $X_n = A^n X_0$
2. Résoudre l'équation (E) : $\det(x\, I_2 - A) = 0$
3. Trouver une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que N est nilpotente.
5. En écrivant $D = 2\, I_2 + N$, calculer D^p
6. Calculer A^n. En déduire une expression de u_n à l'aide de n, α et β.

Exercice 14. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = \alpha, u_1 = \beta, u_2 = \lambda$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+2} + 4u_{n+1} - 12u_n$.
Soient $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $X_n = A^n X_0$
2. Résoudre l'équation (E) : $\det(x\, I_3 - A) = 0$
3. Trouver une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que N est nilpotente.

4. Calculer A^n. En déduire une expression de u_n à l'aide de n, α, β et λ.

Exercice 15. 1. Quel est l'endomorphisme (on exprimera cet endomorphisme en donnant l'image de (x,y,z)) dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan P d'équation $x - y + z = 0$.
   (a) Déterminer un élément e_1 de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à P et non nul.
   (b) Trouver une base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de s dans la base $\mathscr{C}$ est A.
   (c) Déterminer la matrice de s dans la base $\mathscr{B}$ ainsi que $mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$
3. (a) Quelle est la matrice de passage Q de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$? Déterminer l'inverse de cette matrice ?
   (b) Quelles relations a-t-on entre $mat_{\mathscr{B}}(s)$, $mat_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$, Q et A ?

Exercice 16. Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ d'image $vect\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ et de noyau $vect\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)$

1. Déterminer la matrice de p dans la base $vect\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice dans cette base de la symétrie associée.

Exercice 17. 1. Calculer tous les produits possibles parmi les quatres matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer les rangs et noyaux des applications linéaires associées à ces matrices.

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} -9 & -14 & -8 \\ 7 & 11 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et soit $u \in L\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont A est la matrice dans la base canonique.

1. Déterminer les noyaux de $A - I_3$, $A - 2\,I_3$ et $A - 3\,I_3$.
2. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs de ces 3 noyaux ainsi que la matrice de passage Q de la base canonique vers cette base. Calculer l'inverse de Q.
3. Déterminer la matrice B de u dans cette base. Donner la relation entre A, B et Q.
4. En déduire que A est inversible (déterminer son inverse) et A^n. Quelle relation linéaire a-t-on entre I_3 A, A^2 et A^3. Retrouver l'inverse de A.

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 2\sin(\theta) \\ \frac{1}{2}\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ où $\theta \in [0, 2\pi[$.

1. Montrer que : $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \big| A^2 = \alpha\,A + \beta\,I_2$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. À quelle condition a-t-on A inversible. Dans ce cas, déterminer A^{-1}

Exercice 20. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$.
Déterminer $\ker(f + Id)$ et $\ker(f - Id)$. Vérifier que f est une symétrie vectorielle.

Exercice 21. Soit A une matrice carrée telle que $A^2 = I_n$. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, (I_n + A)^p = 2^{p-1}\,(I_n + A)$

Exercice 22. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer A^{-1} par la méthode du pivot. Résoudre $\begin{cases} x + y + z & = a \\ x + 2y + 3z & = b \\ x + 3y + 4z & = c \end{cases}$

Exercice 23. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. En utilisant B, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. A est-elle inversible ? Dans ce cas, calculer A^{-1}
3. Si P est un polynôme, montrer que : $P(A) = \begin{pmatrix} P(2) & P'(2) & \frac{1}{2}P''(2) \\ 0 & P(2) & P'(2) \\ 0 & 0 & P(2) \end{pmatrix}$

Exercice 24.

1. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices carrées d'ordre 3 commutant avec D.
2. Déterminer le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ i.e. $\left\{ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \,\middle|\, \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA \right\}$

Exercice 25. A tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$, on associe le polynôme : $Q = P + P'$.

1. Écrire la matrice de cette application linéaire f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$
3. Résoudre $f(P) = Q$ dans les cas suivants : $Q = X^3 - 2X^2$ et $Q = X^2 + X + 1$

Exercice 26. Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \mapsto \mathbb{R}_3[X], P \to XP' - P$.

1. Écrire la matrice de cette application linéaire f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$
3. Discuter, selon le polynôme Q, l'existence d'un polynôme P tel que $f(P) = Q$.

Exercice 27. Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \mapsto \mathbb{R}_3[X], P \to P'' - 2P' + 3P$.

1. Écrire la matrice de cette application linéaire f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$
3. Discuter, selon le polynôme Q, l'existence d'un polynôme P tel que $f(P) = Q$.

Exercice 28. Déterminer les inverses des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 29. Calculer A^n

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$
3. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a + \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & a - \cos(\theta) \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 30. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}^*$
2. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel E engendré par la famille $(J^n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Montrer que E est est un sous-anneau de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$
4. Montrer que : $(M \in E) \Longleftrightarrow (M \text{ commute avec } J) \Longleftrightarrow (M \text{ commute avec toute matrice de } E)$
5. Soit $A = I_3 - J + J^2$. Déterminer les matrices X de E telles que : $AX = XA = X$