DETERMINANT

I) Groupe symétrique

Groupe symétrique

Définition: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **groupe symétrique d'ordre n** l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{1,..,n\}$ muni de la loi $\circ$.

Remarque: Il s'agit bien d'un groupe et son cardinal est card $(\mathfrak{S}_n) = n!$

Notations: On notera les permutations sous la forme : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Le composé de deux permutations sera noté $\sigma \circ \tau = \sigma\,\tau$

Exemple: Dans $\mathfrak{S}_5$, si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\sigma\,\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Eléments particuliers

Définition: Soit $n \geq 2$. On appelle **cycle** un élément σ de $\mathfrak{S}_n$ pour lequel il existe un entier $p \geq 2$ et une suite $\{a_1, .., a_p\}$ d'éléments de $\{1,..,n\}$ tels que :

- $\forall i \in \{1,.., p-1\}, \sigma(a_i) = a_{i+1}$ et $\sigma(a_p) = a_1$
- $\forall j \in \{1,..,n\} \setminus \{a_1, .., a_p\}$, $\sigma(j) = j$

On dit alors que σ est un cycle de **longueur** p (ou **p-cycle**) et de **support** $\{a_1, .., a_p\}$ et on note $\sigma = (a_1, a_2, ..., a_p)$

Définition: Soit $n \geq 2$. On appelle **transposition** un cycle de longueur 2.

Décomposition d'une permutation en produit de transpositions

Théorème : Toute permutation de {1,..,n} est un produit de transpositions

Dem: Admis. On raisonne par récurrence sur n.

Pratique de la décomposition

On utilise l'algorithme suivant : il suffit à chaque étape de "remettre" à sa place, à l'aide d'une transposition, un élément de {1,..,n} sans perturber les éléments qui sont déjà bien placés.

Exemple: Si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ on a :

$$(4,5) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \text{ puis}$$

$$(1,4) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ puis}$$

$$(2,3) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ puis}$$

$$(1,2) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \text{Id}$$

1	2	3	4	5	
					σ
3	$\boxed{5}$	2	1	$\boxed{4}$	
					(4,5)
3	$\boxed{4}$	2	$\boxed{1}$	5	
					(4,1)
$\boxed{3}$	1	$\boxed{2}$	4	5	
					(2,3)
$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	3	4	5	
					(1,2)
1	2	3	4	5	

D'où : $(1, 2) \circ (2, 3) \circ (1, 4) \circ (4, 5) \circ \sigma = \text{Id}$ et donc $\sigma = (4, 5) \circ (1, 4) \circ (2, 3) \circ (1, 2)$

On n'a pas unicité du nombre de transpositions entrant dans la décomposition : par exemple on a aussi $\sigma = (1,5) \circ (4,5) \circ (1,3) \circ (1,2) \circ (2,3) \circ (1,3)$

Décomposition d'une permutation en produit de cycles

Théorème (admis): Toute permutation de {1,..,n} s'écrit de manière unique, à l'ordre près, comme produit (commutatif) de cycles dont les supports sont disjoints

Exemple: Si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & 1 & 9 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, on a $\sigma = (1,2,4,8,3,5) \circ (6,9,7)$

Signature d'une permutation

Définition: Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **inversion** de σ, un couple (i,j) d'éléments de $\{1,..,n\}$ tels que $i<j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Définition: Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **signature** de σ, le réel $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ où $I(\sigma)$ est le nombre d'inversions de σ. On dit que σ est une permutation **paire** si sa signature est 1, **impaire** si sa signature est –1.

Exemple: Si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, les inversions de σ sont (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (2,5) et (3,4), et sa signature est 1.

Théorème (admis): L'application $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{-1,1\}$, $\sigma \to \varepsilon(\sigma)$ vérifie : Pour toutes permutations σ et σ', $\varepsilon(\sigma\,\sigma') = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\sigma')$ st un morphisme de groupes.

Propriété: Les transpositions ont pour signature –1.

Dem: Les inversions de (i,j) sont (i,i+1), (i,i+2), ..(i,j-1), (i+1,j), (i+2,j), .., (j-1,j) donc elles sont au nombre de $2(j-i) - 1$: Les transpositions sont impaires.

Corollaire: La signature de σ est $(-1)^k$ où k est le nombre de transpositions rentrant dans la décomposition de σ . La parité de ce nombre ne dépend pas de la décomposition.

Définition: On appelle **groupe alterné** noté $\mathfrak{A}_n$ l'ensemble des permutations paires.

Remarque: Il s'agit d'un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ car c'est le noyau du morphisme ε.

II) Applications n-linéaires

Définition: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E et F deux K-espaces vectoriels. Soit f une application de E^n vers F. On dit que f est **n-linéaire** si chaque application partielle

$x_i \to f(x_1,...,x_i,..,x_n)$ est linéaire i.e. $\forall i \in \{1,..,n\}$, $\forall (x_1,...,x_i,..,x_n) \in E^n$, $\forall y_i \in E$, $\forall \lambda \in K$,

$$f(x_1,...,x_i + \lambda\, y_i,..,x_n) = f(x_1,...,x_i ,..,x_n) + \lambda\, f(x_1,...,y_i,..,x_n)$$

Définition: Si $F = K$ et $f : E^n \to K$ est n-linéaire, f est une **forme n-linéaire.**

Remarque: Si $n = 2$, on préférera le terme bilinéaire à celui de 2-linéaire.

Exemples:
- $\varphi : (K[X])^3 \to K[X]$, $(P,Q, R) \to P\,Q'\,R''$ est une application 3-linéaire
- $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((x,y), (x',y')) \to x\,x' + y\,y'$ est une forme bilinéaire
- $\varphi : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(f,g) \to \int_{[0,1]} f\,g$ est une forme bilinéaire

Définition: Une application n-linéaire f est dite **symétrique** si $\forall (i,k) \in \{1,..,n\}^2$, $\forall (x_1,...,x_i,..,x_k, ..,x_n) \in E^n$, $f(x_1,...,x_i,..,x_k,.,x_n) = f(x_1,...,x_k,..,x_i,.,x_n)$

Remarque: Comme toute permutation est produit de transposition, une application f n-linéaire est symétrique ssi $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(i)},..,x_{\sigma(n)}) = f(x_1,...,x_i,.,x_n)$

Définition: Une application n-linéaire f est **antisymétrique** ssi $\forall (i,k) \in \{1,..,n\}^2$, $\forall (x_1,...,x_i,..,x_k, ..,x_n) \in E^n$, $f(x_1,...,x_i,..,x_k,.,x_n) = -f(x_1,...,x_k,..,x_i,.,x_n)$

c'est – à – dire : $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(i)},..,x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\, f(x_1,...,x_i,.,x_n)$

Définition: Une application n-linéaire f est **alternée** ssi pour toute famille $(x_1,...,x_n)$ liée de E^n, on a $f(x_1,...,x_i,...,x_n) = 0$

Propriété: Si φ est une application n-linéaire, φ est antisymétrique $\Leftrightarrow$ φ est alternée

Dem: Soit φ une application n-linéaire de E^n sur F.

- Si φ est antisymétrique. Soit $(i,k)\in\{1,..,n\}^2 \mid x_i = x_k$ et $i \neq k$. Comme φ est antisymétrique
  $\varphi(x_1,\dots,x_i,..,x_k,.,x_n) = -\varphi(x_1,\dots,x_k,..,x_i,.,x_n) = -\varphi(x_1,\dots,x_i,..,x_k,.,x_n)$ car $x_i = x_k$.
  D'où si $x_i = x_k$, $\varphi(x_1,\dots,x_i,..,x_k,.,x_n) = 0$. (A)
  Soit alors $(x_1,\dots,x_i,..,x_n)\in E^n$ une famille liée. On sait alors qu'un des x_i s'écrit comme combinaison linéaires des autres. Par commodité, on peut supposer qu'il s'agit de x_1. On a alors $x_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i$.
  $$\text{D'où } \varphi(x_1, x_2, .., x_n) = \varphi\left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i, x_2, .., x_n\right) = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \varphi(x_i, x_2, .., x_n) = 0 \text{ d'après (A)}$$
- Si φ est alternée. Soit $(x_1,\dots,x_i,..,x_k,..,x_n)\in E^n$. $\varphi(x_1,\dots,x_i + x_k,..,x_i + x_k,..,x_n) = 0$. D'où
  $\varphi(x_1,..,x_i,.,x_i,.,x_n) + \varphi(x_1,.., x_i,.,x_k,.,x_n) + \varphi(x_1,..,x_k,., x_i,.,x_n) + \varphi(x_1,\dots,x_k,.,x_k,..,x_n) = 0$
  D'où comme φ est alternée, $\varphi(x_1,.., x_i,.,x_k,.,x_n) + \varphi(x_1,..,x_k,., x_i,.,x_n) = 0$ φ antisymétrique

III) Déterminant d'une famille de n vecteurs

Formes n-linéaires alternées sur un ev de dimension n

Soit E un K-ev de dimension $n \geq 1$ de base $B = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de n vecteurs de E: $\forall k \in\{1,\dots,n\}$ $x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i$. Soit φ une forme n-linéaire alternée sur E.

Calculons $\varphi(x_1, x_2, .., x_n)$. On a $\varphi(x_1, x_2, .., x_n) = \varphi\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2} e_{i_2}, .., \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} e_{i_n}\right)$.

On développe en utilisant la n-linéarité : $\varphi(x_1, x_2, .., x_n) = \sum_{(i_1,..,i_n)\in\{1,..,n\}^n} a_{i_1,1}a_{i_2,2}..a_{i_n,n} \varphi(e_{i_1},\dots, e_{i_n})$.

Comme φ est alternée, $\varphi(e_{i_1},\dots, e_{i_n})$ est nul dès que $i_1, .., i_n$ ne sont pas deux à deux distincts. Il ne reste donc dans la somme précédente que les termes correspondants aux cas où $(1,..,n) \to (i_1, \dots, i_n)$ est une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$. D'où

$$\varphi(x_1, x_2, .., x_n) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}..a_{\sigma(n),n} \varphi(e_{\sigma(1)},\dots, e_{\sigma(n)}) = \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}..a_{\sigma(n),n}\right) \varphi(e_1,\dots, e_n)$$

Exemples: - Si E est un K-ev de dim. 2 de base (e_1,e_2), si $x = x_1e_1+x_2e_2$ et $y = y_1e_1+y_2e_2$ et si φ est une forme bilinéaire alternée sur E, on a $\varphi(x,y) = (x_1y_2 - x_2y_1)\,\varphi(e_1,e_2)$

- De même, en dimension 3 avec les notations habituelles,
  $\varphi(x,y,z) = (x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2 - x_3y_2z_1)\,\varphi(e_1,e_2,e_3)$

Le résultat précédent montre que si $\Lambda_n(E)$ est l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E, alors c'est un espace de dimension 0 ou 1 car toutes les formes sont proportionnelles.
On admet alors le théorème suivant :

Théorème (admis): Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\Lambda_n(E)$ est un espace vectoriel de dimension 1.

Déterminant

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de n vecteurs de E où $x_k = \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\, e_i$

Définition:. On appelle **déterminant de $(x_1,...,x_n)$ dans la base B**, la valeur : $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}$.

Théorème : Si B est une base de E, l'application $\det_B : E^n \to K$, $S \to \det_B(S)$ est une forme n-linéaire alternée non nulle sur E : elle forme une base de $\Lambda_n(E)$

Dem: Le résultat est admis, mais on peut préciser que $\det_B(B) = 1$ (car les $a_{i,k} = \delta_{i,k}$)
De plus si $\varphi \in \Lambda_n(E)$, on a $\varphi = \varphi(e_1,..,e_n) \det_B$

Changement de bases, caractérisation des bases

Si C est une autre base de E, l'application $\det_C$ est encore une forme n-linéaire alternée. Donc $\det_C = \det_C(B) \det_B = \det_C(e_1,..,e_n) \det_B$.
Donc $\forall X \in E^n$, $\det_C(X) = \det_C(e_1,..,e_n) \det_B(X) = \det_C(B) \det_B(X)$
En particulier, si X = C , on a $1 = \det_C(B) \det_B(C)$ i.e. : $\det_B(C) = (\det_C(B))^{-1}$

Théorème: Soit E un K-ev de dimension $n \geq 1$ et B une base de E. Une famille de n vecteurs de E est une base si et seulement si son déterminant dans la base B est non nul.

Dem: Soit $X = (x_1,..,x_n)$ une famille de n vecteurs de E.

- Si X est une base . On vient de voir qu'alors $\det_B(X) \det_X(B) = 1$. Donc $\det_B(X) \neq 0$
- Si $\det_B(X) \neq 0$. Comme $\det_B$ est une forme n-linéaire alternée, X est libre. Or X est une famille libre de n vecteurs dans un espace de dimension n donc c'est une base.

IV) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme

Théorème: Soit E un K-ev de dim. $n \geq 1$, B une base de E et u un endomorphisme de E.

1) **Il existe $\lambda \in K$ tel que $\forall (x_1,..,x_n) \in E^n$, $\det_B(u(x_1),..,u(x_n)) = \lambda \det_B(x_1,..,x_n)$**
2) **Ce scalaire λ ne dépend pas de la base B de E choisie.**

Dem: 1) L'application $\varphi_u : E^n \to K$, $(x_1,..,x_n) \to \det_B(u(x_1),..,u(x_n))$ est une forme n-linéaire alternée. Or $\Lambda_n(E)$ est de dimension 1 et est engendré par $\det_B$. $\exists\, \lambda \in K \mid \varphi_u = \lambda \det_B$
2) Soit C une autre base de E. On a d'après la formule de changement de bases :
$\det_C(u(x_1),..,u(x_n)) = \det_C(B) \det_B(u(x_1),..,u(x_n)) = \det_C(B)\, \lambda \det_B(x_1,..,x_n)$
D'où $\det_C(u(x_1),..,u(x_n)) = \lambda \det_C(B) \det_B(x_1,..,x_n) = \lambda \det_C(x_1,..,x_n)$: le λ ne dépend pas de la base choisie.

Définition: Ce scalaire λ s'appelle le **déterminant de u** . On le note Det(u) et il est défini par la relation :

$\forall$ B base de E, $\forall (x_1,..,x_n) \in E^n$, $\det_B(u(x_1),..,u(x_n)) = \mathrm{Det}(u) \det_B(x_1,..,x_n)$

Remarque: Puisque $\det_B(B) = 1$ pour toute base B de E, on a si $B = (e_1,..,e_n)$, $\mathrm{Det}(u) = \det_B(u(e_1),...,u(e_n))$.

Déterminant d'un composé, caractérisation des automorphismes

Propriété: Soit E un K-ev de dimension $n \geq 1$

1) **$\forall (u,v) \in (L(E))^2$, $\mathrm{Det}(u \circ v) = \mathrm{Det}(u)\,\mathrm{Det}(v)$**
2) **$\forall u \in L(E)$, $\forall \lambda \in K$, $\mathrm{Det}(\lambda u) = \lambda^n\, \mathrm{Det}(u)$.**

Dem: On considère $B = (e_1, \dots , e_n)$ une base de E.

1) $\mathrm{Det}(u \circ v) = \det_B(u\circ v(e_1),...,u\circ v(e_n)) = \mathrm{Det}(u) \det_B(v(e_1),...,v(e_n)) = \mathrm{Det}(u)\,\mathrm{Det}(v)$
2) $\mathrm{Det}(\lambda u) = \det_B(\lambda u(e_1),..,\lambda u(e_n)) = \lambda^n \det_B(u(e_1),..,u(e_n)) = \lambda^n\, \mathrm{Det}(u)$.

Théorème: Soit E un K-ev de dimension $n \geq 1$ et $u \in L(E)$. $u \in Gl(E) \Leftrightarrow \mathrm{Det}(u) \neq 0$

Dem: On considère $B = (e_1, \dots , e_n)$ une base de E.
$u \in Gl(E) \Leftrightarrow u(B)$ est une base $\Leftrightarrow \det_B(u(B)) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Det}(u) \neq 0$.

Remarque: Si $u \in Gl(E)$, $Det(u^{-1}) = (Det(u))^{-1}$

V) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M_n(K)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

La matrice A représente une famille de vecteurs dans une base B.

Définition: On appelle **déterminant de A** le déterminant de cette famille, i.e.,

$$Det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\ a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Exemples: $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - bdi - ceg - afh$: C'est la règle de Sarrus

Propriétés de ce déterminant : Déterminant d'un produit...

Propriété: Soit E un K-ev de dimension $n \geq 1$, $u \in L(E)$ et B une base de E.
Si $A = Mat_B(u)$ alors $Det(u) = Det(A)$

Dem: Provient directement des définitions des déterminants et de la matrice d'un endomorphisme dans une base.

Propriété: a) $\forall (A,B) \in M_n(K)^2$, $Det(AB) = Det(A)\,Det(B)$.
b) $\forall A \in M_n(K)$, $\forall \lambda \in K$, $Det(\lambda A) = \lambda^n Det(A)$
c) $\forall A \in M_n(K)$, $A \in Gl_n(K) \Leftrightarrow Det(A) \neq 0$ et alors $Det(A^{-1}) = (Det(A))^{-1}$

Dem: Cela provient directement des propriétés sur les endomorphismes.

Déterminant de la transposée

Propriété: $\forall A \in M_n(K)$, $Det({}^tA) = Det(A)$

Dem: Soit $A = (a_{i,k})$. On a ${}^tA = (a'_{i,k})$ avec $\forall (i,k)$, $a'_{i,k} = a_{k,i}$. On a :

$$Det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a'_{\sigma(1),1}\ a'_{\sigma(2),2} \dots a'_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\ a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)}$$

On réordonne chacun des produits dans l'ordre du second indice. On obtient:

$$a_{1,\sigma(1)}\ a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)} = a_{\tau(1),1}\ a_{\tau(2),2} \dots a_{\tau(n),n} \text{ avec } \tau = \sigma^{-1}$$

Nous savons que τ et σ ont la même signature et que l'application de S_n qui à σ associe $\tau = \sigma^{-1}$ est bijective: la somme sur tous les σ de S_n est la somme sur tous les τ de S_n. Ainsi :

$$Det({}^tA) = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau)\, a_{\tau(1),1}\ a_{\tau(2),2} \dots a_{\tau(n),n} = Det(A)$$

VI) Calcul pratique d'un déterminant

Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes

Propriété: Soit A une matrice carrée d'ordre n.

- **Une transposition change le signe du déterminant. Plus généralement, une permutation σ sur les rangées multiplie le déterminant par la signature $\varepsilon(\sigma)$.**
- **Une dilatation $D_i(\alpha)$ sur une rangée multiplie le déterminant par le rapport α.**
- **Une transvection sur une ligne ou une colonne laisse le déterminant inchangé.**

Dem: Effectuer une opération sur les lignes ou les colonnes revient à multiplier la matrice par une certaine matrice. Ainsi en utilisant la formule donnant le déterminant d'un produit de matrices, il suffit de calculer les déterminants des matrices d'opérations élémentaires pour obtenir le résultat annoncé.

Or les matrices de transposition ont un déterminant égal à –1, les matrices de dilatation $D_i(\alpha)$ ont pour déterminant α et les matrices de transvection ont un déterminant égal à 1.

Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Soit $D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$. Le déterminant étant linéaire par rapport à chaque colonne, en particulier la j-ième, on a $D = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ où $A_{i,j}$ est le déterminant obtenu en remplaçant la j-ième colonne par la colonne ne comportant que des 0 sauf un 1 sur la ligne i.

Définition: On appelle ce déterminant, **cofacteur du coefficient $a_{i,j}$**

En utilisant les formules donnant les transformations des déterminants lorsque l'on effectue des opérations sur les lignes ou les colonnes, et en particulier des permutations (les cycles ayant une signature 1 si leur support possède un nombre impair d'éléments et –1 si le support possède un nombre pair d'éléments), on obtient $A_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$, où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant obtenu à partir de D en supprimant la ligne i et la colonne j.

Définition: On appelle ce déterminant, **mineur du coefficient $a_{i,j}$**

En effectuant le même travail sur les lignes, on obtient les résultats suivants :

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} \quad \text{et} \quad D = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$$

Définition: On appelle la première égalité **développement de D suivant la j-ième colonne** , et la seconde égalité, **développement de D suivant la i-ième ligne**

Expression de l'inverse d'une matrice inversible à l'aide du déterminant

Définition: Soit $A \in M_n(K)$. On appelle **comatrice de A** la matrice de ses cofacteurs i.e. : $com(A) = (a'_{i,j})$ où $a'_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ et où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la matrice obtenu à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

Théorème: Soit $A \in M_n(K)$. On note $\tilde{A}$ la transposée de la comatrice de A.

Alors on a: $A\tilde{A} = \tilde{A}A = Det(A)\, I_n$. En particulier, si $A \in Gl_n(K)$, $A^{-1} = \dfrac{1}{Det(A)} \tilde{A}$

Dem: Soit $B = A\tilde{A} = (b_{i,j})$ où $b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\ a'_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} (-1)^{j+k}\ \Delta_{j,k}$

- Si i = j , on reconnaît le développement de Det(A) suivant la i-ième ligne : $b_{i,i}$ = Det(A)
- Si $i \neq j$, tout se passe comme si on développait suivant la j-ième ligne d'un déterminant obtenu à partir de Det(A) en remplaçant cette j-ième ligne de A par la i-ième. Ce déterminant ayant deux lignes égales, il est nul : $b_{i,j} = 0$

D'où $A\tilde{A} = \mathrm{Det}(A)\, I_n$. On fait le même travail pour $\tilde{A}A$.

Corollaire : Formules de Cramer **Si le système AX = Y est de Cramer (où les inconnues sont $(x_1, x_2, .., x_n)$) alors $x_i = \dfrac{\mathrm{Det}(A_i)}{\mathrm{Det}(A)}$ où $\mathrm{Det}(A_i)$ est le déterminant obtenu en remplaçant par Y la i-ième colonne de A.**

Dem: On a : $X = A^{-1}Y = ({}^1/_{\mathrm{Det}(A)})\ \tilde{A}Y$. D'où : $\mathrm{Det}(A)\ x_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\ \Delta_{i,j}\ \ y_j$ ce qui est le développement suivant la i-ième colonne du déterminant obtenu en remplaçant cette colonne par Y.

Déterminant d'une matrice triangulaire

Propriété: Si A est triangulaire alors Det (A) est le produit de ses éléments diagonaux.

Dem: Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$. On a : $\mathrm{Det}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\ a_{\sigma(1),1}\ \ a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}$

Pour toute permutation σ autre que l'identité, il existe un indice $i \in \{1,..,n\}$ tel que $\sigma(i)>i$.
On a alors $a_{\sigma(i),i} = 0$ et par conséquent $a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}...a_{\sigma(n),n} = 0$. Aussi dans la somme donnant le déterminant il ne reste qu'un terme qui peut ne pas être nul : $\mathrm{Det}(A) = a_{1,1}...a_{n,n}$
On fait la même chose avec une matrice triangulaire inférieure (ou on passe à la transposée)

Remarque: On retrouve la condition d'inversibilité des matrices triangulaires.

Exemple: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 160$

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Propriété: Si A est triangulaire par blocs alors Det (A) est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

Dem: On raisonne par récurrence sur le nombre de blocs diagonaux en constatant que les permutations ayant une contribution non a priori nulle dans le déterminant final sont celles qui stabilisent chaque intervalle entier correspondant aux indices de chaque bloc

Déterminant de Vandermonde

Propriété: Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ une famille de n scalaires.

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_i & a_i^2 & \cdots & a_i^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$. Alors : $\mathrm{Det}(A) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$

Dem: On raisonne par récurrence…. On considère le polynome $P(X) = V(a_1, a_2, \ldots, a_n, X)$ où V est le déterminant de Vandermonde associé à la famille de scalaires correspondant. En développant selon la dernière colonne, on montre que P est de degré inférieur ou égal à n, admettant $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pour racines et ayant pour coefficient en X^n valant $V(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. On en déduit que $P(X) = V(a_1, a_2, \ldots, a_n) \times (X - a_1) \times (X - a_2) \times \ldots \times (X - a_n)$. Puis on prend la valeur en a_{n+1}

VII) Applications du déterminant

Orientation de l'espace

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit B une base de E fixée.

Définition: Soit C une base de E. On dit que C est une **base directe** si et seulement si $\det_B(C) > 0$. Dans le cas contraire, on dit que la base C est **indirecte**.

On dit alors que l'on a "orienté" l'espace E.

Remarque: Pour orienter E, il suffit de se donner une base parmi les bases directes car $\det_B(C) = \det_B(D) \times \det_D(C)$.

Exemple: L'espace $\mathbb{R}^3$ est orienté à l'aide de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Définition: Soit E orienté. Soit u un automorphisme de E. On dit que u est **direct** si $\det(u) > 0$ i.e. si et seulement si il transforme une base en une base de même sens.

Alignement dans le plan, coplanarité dans l'espace

Théorème: 1) Soit le plan P. Soit B base de $\mathbb{R}^2$. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ et A un point de P. Les lignes de niveaux de $M \to \det_B(\vec{u},\overrightarrow{AM})$ sont des droites dirigées par $\vec{u}$.

2) Soit l'espace E. Soit B base de $\mathbb{R}^3$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^3$ et A un point de E. Les lignes de niveaux de $M \to \det_B(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM})$ sont des plans parallèles dirigés par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dem: **1)** L'ensemble des points M tels que $\det_B(\vec{u},\overrightarrow{AM}) = 0$ est la droite qui passe par A et qui est dirigée par $\vec{u}$.

Soit maintenant deux points M et N du plan. M et N appartiennent à la même ligne de niveau si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

2) On fait la même chose dans l'espace.

Exercice: Soient trois points M_1, M_2 et M_3 du plan P muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. En appelant (x_i,y_i) les coordonnées de M_i, montrer que M_1, M_2 et M_3 sont alignés sssi

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$. De même, trouver une caractérisation de la coplanarité dans l'espace

Exercice: Montrer que si B est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $|\det_B(\vec{u}, \vec{v})|$ représente l'aire du parallèlogramme de cotés $(\vec{u}, \vec{v})$. De même, si B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $|\det_B(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ représente le volume du parallèlélipède de cotés $(\vec{u},\vec{v}, \vec{w})$

Vecteurs propres, valeurs propres.

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E. .

Définition: Soit $\lambda \in K$. λ est une **valeur propre** de u $\Leftrightarrow \exists x \in E \backslash \{0\}$, $u(x) = \lambda x$.

On dit alors que x est un **vecteur propre** de u et on appelle **espace propre** de u associé à λ l'ensemble $\ker(u-\lambda Id)$.

On appelle **polynôme caractéristique** de u, $\chi_u(X) = \det(u-X\,Id)$

Propriété immédiate: λ est valeur propre de u $\Leftrightarrow \ker(u-\lambda Id) \neq \{0\} \Leftrightarrow \det(u-\lambda Id) = 0 \Leftrightarrow$ λ racine du polynôme caractéristique de u.