MPSI 14-15 Feuille n° 22 : Déterminants Du 17/04/15 au 24/04/15

Exercice 1. Décomposer en produit de cycles à supports disjoints et donner les signatures des permutations suivantes :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 8 & 7 & 2 & 9 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 9 & 8 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 8 & 7 & 3 & 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
Calculer σ^{1789} pour chacune de ces permutations

Exercice 2. On considère un cube (type Rubic ...). On regarde toujours la face blanche toujours dans le même sens. on effectue le mélange suivant : on tourne la face de gauche d'un quart de tour vers le haut puis la face que l'on regarde (la blanche) d'un quart de tour dans le sens trigonométrique. On rítère ce processus. Au bout de combien d'itérations retrouve-t-on la position initiale ?

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant 3$. Calculer $\tau_{i,j} \circ \tau_{i,k}$. En déduire que, pour $n \geqslant 3$, S_n n'est pas commutatif.

Exercice 4. On mélange un jeu de cartes de la façon suivante : on fait deux tas A et B en mettant alternativement une carte du tas initial sur le tas A puis B etc ... Puis on met le tas A au dessus du tas B. Au bout de combien de mélanges revient-on à la position initiale pour un jeu de 12 cartes ? 32 cartes ?

Exercice 5. Calculer :

1. $\begin{vmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 & n+1 & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ 1 & n+2 & \frac{(n+2)(n+3)}{2} \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \\ x & x & 1+x \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$

Exercice 6. Calculer :

1. $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \ddots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \ddots & n-3 & n-2 \\ \vdots & n-1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ 9 & 16 & 25 & 36 & 49 \\ 16 & 25 & 36 & 49 & 64 \\ 25 & 36 & 49 & 64 & 81 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & -x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$

Exercice 7. Factoriser :

1. $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}$

Exercice 8. Soient $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & \cdots & a \\ b & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $a \neq b$, et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que l'application $x \mapsto \det(M + xJ)$ est une fonction affine et en déduire la valeur de $\det(M)$. Que dire si $a = b$?

Exercice 9. <u>Déterminant de Vandermonde</u>. Soit le déterminant $D(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$.

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = D(a,b,c,x)$. Déterminer les degré, racines et coefficient de P. En déduire $D(a,b,c,d)$.

Généralisation. Montrer : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$

Exercice 10. Calculer à l'aide de la comatrice les inverses de $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$