TP d'informatique n°19

Résolutions approchées d'équations différentielles

L'objectif du TP est de tester la méthode d'Euler pour obtenir des solutions approchées d'équations différentielles.

I) Implémentation de l'algorithme d'Euler

Ecrire dans un fichier d'édition Python, l'algorithme d'Euler sous forme numérique et sous forme vectorielle.

II) Equations différentielles numériques du premier ordre

a) Utiliser le programme Euler pour tracer une solution approchée de l'équation différentielle $y' - 2t\,y = -2t$ entre 0 et 1 passant par le point (0, 3).

b) Faites de même avec l'équation différentielle : $\cos(t)\,y' + \sin(t)\,y = 1$ sur [0, 1] puis [0,10]

III) Equations différentielles vectorielles du premier ordre

Implémenter le programme Eulervectoriel (en pensant à utiliser le type array de Numpy)

1) **Cinétique Chimique** On considère le schéma cinétique suivant : **(1)** $2\,A \rightarrow B$ de constante de vitesse k_1 puis **(2)** $B \rightarrow C$ de constante de vitesse k_2. Toutes les réactions sont totales, **(1)** est d'ordre 2 par rapport à A et **(2)** est du premier ordre par rapport à B. Les concentrations initiales en B et C sont nulles. [A](0) est notée a.

a) Quelles sont les limites de [A], [B] et [C] lorsque t tend vers $+\infty$?

b) L'étude cinétique chimique montre que [A], [B] et [C] vérifient le système différentiel : $\frac{d[A]}{dt} + 2\,k_1\,[A]^2 = 0$, $\frac{d[B]}{dt} + k_2\,[B] = k_1\,[A]^2$ et $\frac{d[C]}{dt} = k_2\,[B]$. Exprimer [A] en fonction de t . Est-il possible de faire de même pour [B] et [C].

c) Les expressions de [B] n'étant pas si simples à obtenir, on va opter pour une solution approchée. Tracer les fonctions (approchées) $\frac{[A]}{a}$, $\frac{[B]}{a}$ et $\frac{[C]}{a}$ en fonction de t en utilisant la méthode d'Euler sur $[0, t_{max}]$ pour les cas suivants :

	k_1	k_2	a	t_{max}
cas 1	1	1	0.01	400
cas 2	1	1	1	20
cas 3	0.01	1	1	400
cas 4	0.1	1	0.1	400

d) Pour les mêmes cas, tracer les fonctions v_1 et v_2 des vitesses de réactions en fonction de t.

2) **<u>Evolution des populations d'un système Prédateurs-Proies</u>** On suppose que les populations de renards et de lapins d'un écosystème "préservé" sont régies par le système différentiel : $x'(t) = x(t)\,(a - b\,y(t))$ et $y'(t) = -\,y(t)\,(c - d\,x(t))$ où $x(t)$ est l'effectif à l'instant t des proies (ici les lapins) et $y(t)$ est l'effectif des prédateurs, a est le taux de reproduction des proies (en l'absence de prédateurs), b le taux de mortalité des proies dû aux prédateurs rencontrés, c est le taux de mortalité des prédateurs et d est le taux de reproduction des prédateurs.

a) En utilisant Eulervectoriel, tracer les graphes de x(t) et y(t) en fonction de t puis de y't) en fonction de x(t) avec $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 3$ pour une condition initiale donnée.

b) Faites de même en faisant varier les conditions initiales.

c) Idem en jouant sur les paramètres….

IV) Equations différentielles numériques d'ordre supérieur

a) Utiliser le programme Eulervectoriel pour tracer une solution approchée de l'équation différentielle $y'' - y' - 2y = -\ 3e^{-t}$ sur [0,2] avec les conditions initiales : $y(0) = 3$ et $y'(0) = 1$.

b) On considère l'équation du pendule sans frottements : $\theta'' + \omega^2 \sin(\theta) = 0$. Tracer un portrait de phase (c'est-à-dire l'ensemble des points $\theta(t), \theta'(t)$) . Faites de même avec le cas du pendule avec frottements (ie : où il faut ajouter un terme de la forme $k\,\theta'$