Devoir en temps libre n° 14

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.
Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Mines de Sup 1995

Notations :

n est un entier naturel fixé, $n \geqslant 2$.

$\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.

E_n est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

PARTIE I

Si $f \in \mathcal{F}$, on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x), \quad \text{et} \quad T(f)(x) = f(x+1)$$

On admettra (aisément !) que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

On note $\Delta^0 = T^0 = Id_{\mathcal{F}}$ (donc, si $f \in \mathcal{F}$, $\Delta^0(f) = T^0(f) = f$), et, si $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 1$,

$$\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1}, \quad T^j = T^{j-1} \circ T = T \circ T^{j-1}.$$

1. (a) i. Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme.
   Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de P.
   Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.
   ii. Vérifier que Δ induit un endomorphisme de E_n, noté Δ_n.
   (b) i. Déterminer $\ker \Delta_n$.
   ii. En déduire le rang de Δ_n. Déterminer $\dim \Delta_n$.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes N_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad N_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad N_k(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

   (a) i. Pour $k \geqslant 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction des polynômes $(N_j)_{j \geqslant 0}$.
   ii. Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$, puis $\left(\Delta^j(N_k)\right)(0)$.
   (b) i. Montrer que la famille $(N_0, N_1, ..., N_n)$ est une base de E_n.
   ii. Soit $P \in E_n$. P s'écrit $P = a_0N_0 + a_1N_1 + \cdots + a_nN_n$ où $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
   Exprimer les a_j en fonction des $\left(\Delta^j(P)\right)(0)$.
3. (a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$. Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$, $\left(T^k(f)\right)(x)$.
   (b) Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{F}$.
   i. Expliciter $\Delta^j(f)$ en fonction des $T^k(f)$, $0 \leqslant k \leqslant j$. (On pourra remarquer que $\Delta = T - Id_{\mathcal{F}}$).
   ii. En déduire que $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ ne dépend que des valeurs $f(0), f(1), ..., f(j)$ de f aux points $0, 1, ..., j$.

PARTIE II

On se donne une fonction f de $\mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \deg P \leqslant n \\ \forall k \in \{0,1,...,n\}, \qquad P(k) = f(k) \end{cases}$$

On pose $N(x) = \prod_{j=0}^{n} (x-j) = x(x-1)\cdots(x-n)$.

1. (a) Soit l'application linéaire $\Phi : \begin{array}{ccc} E_n & \rightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(0),..,P(n)) \end{array}$

   Montrer que Φ est un isomorphisme.

   (b) En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution notée P_f.

2. (a) Pour $j \in \{0,1,...,n\}$, comparer $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ et $\left(\Delta^j(P_f)\right)(0)$.

   (b) En déduire l' expression de P_f en fonction des $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ et des polynômes N_j.

3. Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

   On note $M_n = \sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right|, \quad t \in [0,n]\right\}$.

   (a) Soit $x \in [0,n]$, non entier. Montrer que : $\exists\, c \in]0,n[\quad / \quad f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} N(x)$.
   (On pourra poser $\varphi(t) = f(t) - P_f(t) - KN(t)$, où K est tel que $\varphi(x) = 0$, et appliquer judicieusement le théorème de Rolle).

   (b) En déduire que : $\forall x \in [0,n], |f(x) - P_f(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1} M_n$.
   (On pourra majorer $|N(x)|$ sur chaque intervalle $[j, j+1]$, où $j \in \{0,1,...,n-1\}$).

CORRECTION

PROBLEME I : Polynômes de Tchebychev de première espèce (suite)

$P_0 = I, P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$

On rappelle que l'on a : P_n de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} si $n \geqslant 1$. On sait aussi qu'il est de la parité de n, qu'il vérifie : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, P_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$, qu'il possède n zéros réels distincts : les $\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$

PARTIE IV 1. Soit $\mathscr{R}_n$: " P_n et P_{n+1} sont à coefficients entiers"

☞ $\mathscr{R}_0$ est-elle vraie ? $P_0 = I$ et $P_1 = X$ sont à coefficients entiers donc $\boxed{\mathscr{R}_0 \text{ est vraie}}$

☞ Supposons $\mathscr{R}_n$ vraie pour un certain entier n. $\mathscr{R}_{n+1}$ est-elle vraie ?.
On a P_n et P_{n+1} à coefficients entiers. Donc $2XP_{n+1} - P_n$ est aussi à coefficients entiers. En particulier, P_{n+1} et P_{n+2} sont à coefficients entiers. Ainsi $\boxed{\mathscr{R}_{n+1} \text{ est vraie}}$

☞ On a montré que $\mathscr{R}_0$ est vraie et, pour tout entier n, $\mathscr{R}_n$ vraie entraine $\mathscr{R}_{n+1}$ vraie. Ainsi par théorême de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{R}_n$ vraie, et en particulier,
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P_n \text{ est à coefficients entiers}}$

2. On pose f la fonction qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $f(t) = P_n(\cos(t)) = \cos(n\,t)$. f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a d'une part :
$\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) = -\cos(t)P_n'(\cos(t)) + \sin^2(t)P_n''(\cos(t))$
et d'autre part : $\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) = -n^2 P_n(\cos(t))$.
Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}, n^2 P_n(\cos(t)) - \cos(t)P_n'(\cos(t)) + \sin^2(t)P_n'(\cos(t)) = 0$
En particulier, le polynôme : $n^2 P_n - XP_n' + (1 - X^2)\,P_n''$ s'annule en tout $\cos(t)$ donc en tout point de $[-1, 1]$ car $\cos(t)$ décrit $[-1, 1]$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$. Ainsi P_n satisfait l'équation différentielle : $\boxed{(1 - X^2)\,P_n''(X) - XP_n'(X) + n^2 P_n(X) = 0}$

3. On note $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k X^{n-2k}$

On a : $P_n' = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(n-2k)a_k X^{n-2k-1}$ et $P_n'' = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(n-2k)(n-2k-1)a_k X^{n-2k-2}$.
Ainsi, comme $X^2\,P_n'' + XP_n' - n^2 P_n = P_n''$, on en déduit :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(n-2k)(n-2k-1)a_k X^{n-2k-2} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 4k(k-n)a_k X^{n-2k} \text{ i.e.}$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} (n-2k)(n-2k-1)a_k X^{n-2k-2} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} 4(k+1)(k+1-n)a_{k+1} X^{n-2k-2}$$

La famille $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ étant libre, on peut identifier et on a :

$$\forall k \in \left[\!\left[0, \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor - 1\right]\!\right], a_{k+1} = \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{4(k+1)(k+1-n)} a_k$$

En remarquant que a_0 est le coefficient dominant de P_n et en regroupant certains facteurs pour reconnaitre des factorielles, on en déduit :

$$\boxed{a_k = (-1)^k \frac{n}{n-k} 2^{n-2k-1} \binom{n-k}{k}}$$

4. En utilisant les expressions précédentes ou en reprenant la relation de récurrence, on montre :
$\boxed{P_3 = 4X^3 - 3X \text{ , } P_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1 \text{ et } P_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X}$

PARTIE V On pose $r = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ et $1 \leqslant p < \frac{q}{2}$ (donc $q \geqslant 3$).
Dans les questions **1** à **4**, on suppose que $\cos(r\pi)$ appartient à $\mathbb{Q}$.

1. $p \wedge q = 1$ donc d'après Bezout, il existe un couple (u, v) d'entiers tel que $pu + qv = 1$. Ainsi $\frac{\pi}{q} = \pi v + ur\pi$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) = (-1)^v\,P_{|u|}(\cos(r\pi))$.

Donc, puisque $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$ et $P_{|u|}$ est à coefficients entiers, on a $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q}}$.

2. On suppose par l'absurde que q est un multiple de 4.
   On écrit q sous la forme $q = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
   On a alors $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = P_k\left(\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)$. Comme P_k est à coefficients entiers et $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q}$, on en déduit $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Q}$ i.e. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux.
   Ainsi $\boxed{q \textbf{ n'est pas un multiple de 4}}$.
3. On considère l'équation à coefficients entiers :
   $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.
   On suppose que cette équation admet une solution rationnelle $\dfrac{\alpha}{\beta}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$.
   On a montré en exercice qu'alors $\boxed{\alpha \textbf{ divise } a_0 \textbf{ et } \beta \textbf{ divise } a_n}$.
   Si q est impair, le coefficient constant de P_q est nul. Or $P_q\left(\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\right) = -1$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$ est racine de $P_q + 1$ qui est à coefficients entiers, de coefficient dominant 2^{q-1} et de coefficient constant 1. Donc si $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$ est rationnel de la forme $\dfrac{\alpha}{\beta}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$, on en déduit $\alpha = 1$ et $\beta = 2^k$ avec $0 \leqslant k \leqslant q-1$ car, par ailleurs, $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) > 0$. Mais alors soit $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) = 1$ ce qui est impossible, soit $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \leqslant \frac{1}{2}$. Or $q \geqslant 3$ donc par décroissance de cos sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. En regroupant les deux inégalités, on en déduit $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \leqslant \frac{1}{2}$ et $q = 3$.
   $\boxed{\textbf{si } q \textbf{ est impair, alors } q = 3}$.
4. Si q est pair, alors comme q n'est pas un multiple de 4, on a $q = 2k$ avec k impair et donc $k \geqslant 3$. $\cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)^2 - 1 \in \mathbb{Q}$ donc, d'après la question précédente, $k = 3$.
   Ainsi $q = 6$. Or $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$. Ainsi $\boxed{q \textbf{ ne peut pas être pair}}$
5. On a trouvé que pour que $\cos\left(\frac{p\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q}$ avec $\frac{p}{q} \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, il fallait $q = 3$ et donc également $p = 1$. Réciproquement $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.
   Donc $\boxed{\dfrac{1}{3} \textbf{ est le seul rationnel } r \in \left]0, \tfrac{1}{2}\right[\textbf{ tel que } \cos(r\pi) \in \mathbb{Q}}$

PROBLEME II : Polynômes de Bernoulli (suite)

On définit les polynômes P_n par les conditions : $B_0 = I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, B'_{n+1} = B_n$ et $\displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0$.

On rappelle que l'on a : B_n de degré n et de coefficient dominant $\frac{1}{n!}$

1. On trouve : $\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}}$, $\boxed{B_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}}$, $\boxed{B_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X}$,
   $\boxed{B_4 = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{24}X^2 - \frac{1}{720}}$ et $\boxed{B_5 = \frac{1}{120}X^5 - \frac{1}{48}X^4 + \frac{1}{72}X^3 - \frac{1}{720}X}$.

Partie II : Séries de Riemann et nombres de Bernoulli

1) Montrer , de préférence sans récurrence, que : $\forall N\in \mathbb{N}^*$, $\forall t\in]0,1[$, $1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$

Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Soit $t\in]0,1[$. On pose $T = 1 + 2\sum_{k=1}^{N}\cos(2k\pi t)$

On a : $T = \sum_{k=-N}^{N}\cos(2k\pi t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=-N}^{N} e^{2ik\pi t}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{-2iN\pi t}\left(\sum_{k=0}^{2N} e^{2ik\pi t}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(e^{-2iN\pi t}\left(\frac{1-e^{2i(2N+1)\pi t}}{1-e^{2i\pi t}}\right)\right)$ car $e^{2i\pi t}\neq 1$

Ainsi $T = \mathrm{Re}\left(e^{-2iN\pi t}\left(\frac{2i\sin((2N+1)\pi t)\, e^{i(2N+1)\pi t}}{2i\sin(\pi t)\, e^{i\pi t}}\right)\right) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$. D'où : $\mathbf{1 + 2\sum_{k=1}^{N}\cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}}$

2) Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$, la fonction φ_n définie par $\forall t\in]0,1[$, $\varphi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ et que le prolongement (que l'on note encore φ_n) est de classe C^1 sur $[0,1]$.

Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. En 0, pour $t\in]0,1[$, on a : $B_n(t) = B_n(0) + B'_n(0)\, t + o(t)$.

Aussi $\lim_{t\to 0^+}\varphi_n(t) = \frac{B'_n(0)}{\pi}$: **φ_n est donc prolongeable par continuité en 0 , le prolongement étant noté $\varphi_n(0) = \frac{B'_n(0)}{\pi}$**

φ_n est de classe C^1 sur $]0,1[$ car quotient de fonctions de classe C^1 sur $]0,1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus :

$\forall t\in]0,1[$: $\varphi'_n(t) = \frac{B'_n(t)\sin(\pi t) - \pi\,(B_n(t) - B_n(0))\cos(\pi t)}{(\sin(\pi t))^2}$.

Or B_n et B'_n étant des polynômes, ils admettent des DL à tout ordre en 0 et on a :

$B'_n(t)\sin(\pi t) - \pi\,(B_n(t) - B_n(0))\cos(\pi t) = (B'_n(0) + B''_n(0)\,t + o(t))\,(\pi t + o(t^2)) - \pi\,(B'_n(0)\,t + \frac{B''_n(0)}{2}t^2 + o(t^2))\,(1 - \frac{\pi^2 t^2}{2} + o(t^2))$

D'où $\varphi'_n(t) = \dfrac{\frac{\pi B''_n(0)}{2}t^2 + o(t^2)}{\pi^2 t^2 + o(t^2)}$ D'où φ'_n possède une limite finie $\frac{B''_n(0)}{2\pi}$ en 0

Ainsi φ_n est continue sur $[0,1[$, de classe C^1 sur $]0,1[$ et φ'_n possède une limite finie en 0, donc d'après le théorême de prolongement, **φ_n est de classe C^1 sur $[0,1[$**

D'autre part, on a : $\forall\, t\in]0,1[$, $\varphi_n(1-t) = \frac{B_n(1-t) - B_n(0)}{\sin(\pi - \pi t)} = \frac{(-1)^n B_n(t) - (-1)^n B_n(1)}{\sin(\pi t)} = (-1)^n\varphi_n(t)$ car $B_n(0) = B_n(1)$

Aussi on a les mêmes résultats en 1 qu'en 0, et donc, **φ_n est de classe C^1 sur $[0,1]$**

3) Montrer, par exemple à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall f\in C^1([0,1],\mathbb{R})$, $\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(xt)\,dt = 0$

Soit f de classe C^1 sur $[0,1]$ et $x>0$. En intégrant par parties, on a : $\int_0^1 f(t)\sin(xt)\,dt = \left[\frac{-\cos(xt)}{x}f(t)\right]_0^1 + \int_0^1 f'(t)\frac{\cos(xt)}{x}\,dt$

Ainsi, puisque $|f|$ et $|f'|$ sont continues sur $[0,1]$ donc majorées (par exemple par le majorant commun M), on obtient :

$\left|\left[\frac{-\cos(xt)}{x}f(t)\right]_0^1 + \int_0^1 f'(t)\frac{\cos(xt)}{x}\,dt\right| \leq \left|\left[\frac{\cos(xt)}{x}f(t)\right]_0^1\right| + \int_0^1 |f'(t)|\frac{1}{x}\,dt \leq \frac{2M}{x} + \frac{M}{x} = \frac{3M}{x}$. D'où $\mathbf{\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 f(t)\sin(xt)\,dt = 0}$

4) Pour k et n entiers strictement positifs, on définit : $I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t)\cos(2k\pi t)\,dt$. **T**rouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-2,k}$ et en déduire selon la parité de n, l'expression de $I_{n,k}$ en fonction de k et de n.

- Si $n = 1$ et $k\in\mathbb{N}^*$, on a : $I_{1,k} = \int_0^1\left(t - \frac{1}{2}\right)\cos(2k\pi t)\,dt = \left[\frac{t\sin(2k\pi t)}{2k\pi} + \frac{\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2}\right]_0^1 = 0$
- Si $n\geq 2$ et $k\in\mathbb{N}^*$. En intégrant deux fois par parties $I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t)\cos(2k\pi t)\,dt$, on obtient :

$I_{n,k} = \left[\frac{B_n(t)\sin(2k\pi t)}{2k\pi} + \frac{B_{n-1}(t)\cos(2k\pi t)}{(2k\pi)^2}\right]_0^1 - \frac{1}{(2k\pi)^2}\int_0^1 B_{n-2}(t)\cos(2k\pi t)\,dt = \frac{1}{(2k\pi)^2}(B_{n-1}(1) - B_{n-1}(0) - I_{n-2,k})$ Ainsi

- Si $n = 2$, on a $I_{2,k} = \frac{1}{(2k\pi)^2}$
- Si $n>2$, on a $I_{n,k} = \frac{-1}{(2k\pi)^2}I_{n-2,k}$

D'où : **si n est impair , $\forall\, k\in\mathbb{N}^*$, $I_{n,k} = 0$ et si n est pair, avec $n = 2p$, $p\geq 1$, on a $\forall\, k\in\mathbb{N}^*$ $I_{2p,k} = \frac{(-1)^{p+1}}{(2k\pi)^{2p}}$**

5) **E**n utilisant la formule du **II 1**, trouver, pour $N\in\mathbb{N}$, une expression de $\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\,dt$ en fonction de m, N et $B_{2m}(0)$.

En déduire la convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2m}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la valeur de la limite , notée $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2m}}$, en fonction de m et $B_{2m}(0)$. **E**xpliciter $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}$

Si m = 0, on a $\int_0^1 \varphi_0(t)\sin((2N+1)\pi t)\,dt = 0$

Si $m\geq 1$. On a : $\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\,dt = \int_0^1 (B_{2m}(t)-B_{2m}(0))\frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}\,dt = = \int_0^1 (B_{2m}(t)-B_{2m}(0))dt + 2\sum_{k=1}^{N}\int_0^1 (B_{2m}(t)-B_{2m}(0))\cos(2k\pi t)\,dt$

D'où $\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\,dt = \int_0^1 B_{2m}(t)\,dt - B_{2m}(0) + 2\sum_{k=1}^{N} I_{2m,k} - 2\,B_{2m}(0)\sum_{k=1}^{N}\int_0^1\cos(2k\pi t)\,dt$

Or $\int_0^1 B_{2m}(t)\,dt = 0$, $\int_0^1 \cos(2k\pi t)\,dt = 0$ et $I_{2m,k} = \frac{(-1)^{m+1}}{(2k\pi)^{2m}}$. D'où : $\boldsymbol{\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\,dt = 2\frac{(-1)^{m+1}}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2m}} - B_{2m}(0)}$

Puisque φ_{2m} est de classe C^1 sur [0,1], on a $\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \varphi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\,dt = 0$

Donc $\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^{2m}}$ existe et vaut : $\frac{(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m}B_{2m}(0)}{2}$: $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2m}} = \frac{(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m}B_{2m}(0)}{2}}$

Pour m = 1 on a $B_2(0) = \frac{1}{12}$ et pour m =2 on a $B_4(0) = -\frac{1}{720}$, donc : $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$ **et** $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}}$

6) **M**ontrer, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, la majoration : $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2m}}\leq 2$ et en déduire $\left|B_{2m}(0)\right| \leq \frac{4}{(4\pi^2)^m}$

Soit $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$. On a : $\forall x\in[k-1,k]$, $\frac{1}{x^2}\geq\frac{1}{k^2}\geq\frac{1}{k^{2m}}$ D'où : $\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x^2}\geq\frac{1}{k^{2m}}$.

Aussi $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2m}} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{2m}} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x^2} = 1 + \int_1^n\frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n}\leq 2.$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient : $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2m}}\leq 2}$

En utilisant cette majoration dans l'expression $B_{2m}(0) = \frac{2(-1)^{m+1}}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2m}}$, on en déduit : $\boldsymbol{\left|B_{2m}(0)\right|\leq\frac{4}{(4\pi^2)^m}}$

PARTIE II

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,1[$. On pose $T = 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t)$. On a :

$$T = \sum_{k=-N}^{N} \cos(2k\pi t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=-N}^{N} e^{2ik\pi t}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{-2iN\pi t}\left(\sum_{k=0}^{2N} e^{2ik\pi t}\right)\right)$$

Donc $T = \mathrm{Re}\left(e^{-2iN\pi t}\left(\dfrac{1-e^{2i(2N+1)\pi t}}{1-e^{2i\pi t}}\right)\right)$ car $e^{2i\pi t} \neq 1$.

Ainsi $T = \mathrm{Re}\left(e^{-2iN\pi t}\left(\dfrac{2i\sin\left((2N+1)\pi t\right)e^{i(2N+1)\pi t}}{2i\sin\left(\pi t\right)e^{i\pi t}}\right)\right) = \dfrac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}$

Ainsi $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0,1[$, $\boxed{1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \dfrac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}}$

2. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2$, la fonction ϕ_n définie par : $\forall t \in]0,1[, \phi_n(t) = \dfrac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ et que le prolongement (que l'on notera encore ϕ_n) est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$.
3. Montrer, par exemple à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)dt = 0.$
4. Pour k et n entiers strictement positifs, on définit : $I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t)\cos(2k\pi t)dt.$
   Trouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-2k,k}$ et en déduire selon la parité de n, l'expression de $I_{n,k}$ en fonction de k et de n.
5. En utilisant la formule du **1**, trouver, pour $N \in \mathbb{N}$, une expression de $\int_0^1 \phi_{2m}(t)\cos((2N+1)\pi t)dt$ en fonction de m, N et $B_{2m}(0)$.
   En déduire la convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^{2m}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la valeur de la limite, notée $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^{2m}}$ en fonction de m et $B_{2m}(0)$.
   Expliciter $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^4}$.
6. Montrer, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la majoration : $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^{2m}} \leqslant 2$ et en déduire : $|B_{2m}(0)| \leqslant \dfrac{4}{(4\pi^2)^m}$