Devoir en temps libre n° 16

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Mines de Sup TSI 1996

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On considère les matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On convient que si M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ alors $M^0 = \mathbf{I}$.
Si P est un polynôme réel avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ et si M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note $P(M)$ la matrice : $P(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k = a_0 \mathbf{I} + a_1 M + \cdots + a_n M^n$.

PARTIE A

1. Montrer que $\mathbf{A}$ est inversible et calculer $\mathbf{A}^{-1}$
2. (a) Calculer $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{A}^3$
   (b) Montrer que $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{A}^3$ se mettent sous la forme : $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{A} + \mu_1 \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^2 = \lambda_2 \mathbf{A} + \mu_2 \mathbf{I}$ et $\mathbf{A}^3 = \lambda_3 \mathbf{A} + \mu_3 \mathbf{I}$ où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ sont des réels que l'on précisera.
3. On donne la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + 2\alpha_n$.
   Montrer, par récurrence sur n, que : $\forall n \geqslant 2, \mathbf{A}^n = \alpha_n \mathbf{A} + 2\alpha_{n-1} \mathbf{I}$
4. (a) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\alpha_n = \sigma(-1)^n + \tau 2^n$, où σ et τ sont deux réels indépendants de n que l'on déterminera
   (b) En déduire l'expression de $\mathbf{A}^n$ en fonction de n pour tout entier naturel n non nul.

PARTIE B

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\mathbf{A}$.

1. (a) On pose $E_1 = \ker(f + Id)$ et $E_2 = \ker(f - 2Id)$. Rappeler pourquoi E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer E_1 et E_2 ainsi que leur nature géométrique. Donner une base $\mathscr{C}_1$ de E_1 et une base $\mathscr{C}_2$ de E_2.
   On choisira des vecteurs dont la première coordonnée est 1 et dont une coordonnée est nulle, lorsque cela est possible.
   (c) Montrer que, si on appelle $\mathscr{C}$ la famille obtenue en effectuant la réunion de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, on obtient une base de $\mathbb{R}^3$
   (d) Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$
   (e) Soient f_1 et f_2 les restrictions de f à E_1 et E_2. Déterminer les natures géométriques de f_1 et f_2.
2. (a) Déterminer la matrice $\mathbf{D}$ de f dans la base $\mathscr{C}$

(b) Déterminer la matrice de passage $\mathbf{P}$ de la base canonique $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{C}$.

(c) Rappeler pourquoi $\mathbf{P}$ est inversible et calculer son inverse $\mathbf{P}^{-1}$

(d) Montrer que, pour tout entier n naturel non nul, $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$

(e) En déduire la valeur de $\mathbf{A}^n$ en fonction de n entier naturel non nul.

PARTIE C

1. (a) Calculer le produit $(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$. En déduire à nouveau que $\mathbf{A}$ est inversible et retrouver $\mathbf{A}^{-1}$.

   (b) Calculer de même $(\mathbf{A}+\mathbf{I})^2$ et $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2$, et en déduire une expression simple de $(\mathbf{A}+\mathbf{I})^n$ et $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^n$ pour tout entier n non nul.

2. On note $\mathbf{M}(a,b)$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{M}(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) On note l'ensemble $F = \left\{\mathbf{M}(a,b) \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que F est de dimension 2.

   (c) Montrer que $((\mathbf{A}+\mathbf{I}), (\mathbf{A}-2\mathbf{I}))$ est une base de F.

   (d) Calculer les coordonnées de $\mathbf{M}(a,b)$ dans cette base.

3. Calculer $(\mathbf{M}(a,b))^n$ pour tout entier naturel n non nul. Vérifier le résultat obtenu dans le cas particulier $\mathbf{M}(0,1)$

PARTIE D

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit R_n le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $(X+1)(X-2)$.

1. (a) Que peut-on dire du degré de R_n ?

   (b) Calculer $R_n(-1)$ et $R_n(2)$ puis déterminer le polynôme R_n.

   (c) Montrer que les coefficients de R_n sont des entiers.

2. Retrouver à nouveau l'expression de $\mathbf{A}^n$

CORRIGE

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique B = (e_1,e_2,e_3). On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On considère les matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On convient que si M est une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ alors $M^0 = \mathbf{I}$.

Si P est un polynôme réel, $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$, et si M est une matrice de $M_3(\mathbb{R})$, on note : $P(M) = \sum_{i=0}^{n} a_i M^i = a_0 \mathbf{I} + a_1 M + \ldots + a_n M^n$

Partie A

1°) **M**ontrer que **A** est inversible et calculer $\mathbf{A}^{-1}$.

On a : $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2\,\mathbf{I} + \mathbf{A}$ Aussi : $\left(\frac{1}{2}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{I}\right)\mathbf{A} = \mathbf{I}$ D'où **A inversible d'inverse :** $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{I}$

Autre méthode : par la méthode du pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_1}{\overset{L_1 \leftarrow L_3}{\longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3}{\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1,\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}{\longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

D'où **A inversible d'inverse :** $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2°) **a) C**alculer $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{A}^3$.

On a : $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2\,\mathbf{I} + \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2\,\mathbf{I} + 3\,\mathbf{A}$

b) Montrer que **A**, $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{A}^3$ se mettent sous la forme: $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{A} + \mu_1\mathbf{I}$, $\mathbf{A}^2 = \lambda_2\mathbf{A} + \mu_2\mathbf{I}$ et $\mathbf{A}^3 = \lambda_3\,\mathbf{A} + \mu_3\,\mathbf{I}$ où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ sont des réels que l'on précisera.

$\mathbf{A} = \lambda_1\,\mathbf{A} + \mu_1\,\mathbf{I}$ **avec** $(\lambda_1, \mu_1) = (1,0)$, $\mathbf{A}^2 = \lambda_2\,\mathbf{A} + \mu_2\,\mathbf{I}$ **avec** $(\lambda_2, \mu_2) = (1,2)$, $\mathbf{A}^3 = \lambda_3\,\mathbf{A} + \mu_3\,\mathbf{I}$ **avec** $(\lambda_3, \mu_3) = (3,2)$

3°) **O**n donne la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + 2\,\alpha_n$. **M**ontrer que : $\forall n\geq 2$, $\mathbf{A}^n = \alpha_n\,\mathbf{A} + 2\,\alpha_{n-1}\,\mathbf{I}$

Soit P_n la propriété de récurrence : " $\mathbf{A}^n = \alpha_n\,\mathbf{A} + 2\,\alpha_{n-1}\,\mathbf{I}$ "

- P_2 vraie ? On a : $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} + 2\,\mathbf{I}$. Or $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ donc on a bien $\mathbf{A}^2 = \alpha_2\,\mathbf{A} + 2\,\alpha_1\,\mathbf{I}$ donc **P_2 est vraie**
- Si P_n est vraie (avec $n\geq 2$), P_{n+1} est-elle également vraie ? On a $\mathbf{A}^n = \alpha_n\,\mathbf{A} + 2\,\alpha_{n-1}\,\mathbf{I}$. D'où $\mathbf{A}^{n+1} = \alpha_n\,\mathbf{A}^2 + 2\,\alpha_{n-1}\,\mathbf{A}$
  Or $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} + 2\,\mathbf{I}$, d'où : $\mathbf{A}^{n+1} = (\alpha_n + 2\,\alpha_{n-1})\,\mathbf{A} + 2\,\alpha_n\,\mathbf{I} = \alpha_{n+1}\,\mathbf{A} + 2\,\alpha_n\,\mathbf{I}$ car $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 2\,\alpha_{n-1}$. Donc **$P_{n+1}$ est vraie**
- Ainsi on a montré que P_2 est vraie et que, si P_n vraie (avec $n\geq 2$) , P_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurre
  on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, P_n vraie i.e. $\boldsymbol{\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2\ ,\ \mathbf{A}^n = \alpha_n\,\mathbf{A} + 2\,\alpha_{n-1}\,\mathbf{I}}$

4°) **a) D**émontrer que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_n = \sigma\,(-1)^n + \tau\,(2)^n$ où (σ, τ) sont deux réels indépendants de n que l'on déterminera.

L'ensemble $\mathbf{S} = \left\{ \left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \mid \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2\,u_n \right\}$ **est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ de dimension 2**

Or les suites $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de S linéairement indépendantes ; Ainsi elles forment une base de S

En particulier, puisque $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in S$, $\exists\,(\sigma, \tau)\in\mathbb{R}^2 \mid \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \alpha_n = \sigma\,(-1)^n + \tau\,(2)^n$ (*)

Or $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, donc en remplaçant dans (*) on trouve : $\sigma = -\frac{1}{3}$ et $\tau = \frac{1}{3}$ Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \alpha_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)$

b) En déduire l'expression de $\mathbf{A}^n$ en fonction de n pour tout entier n non nul.

En remplaçant dans l'expression obtenue dans la question 3), on obtient :

$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ \mathbf{A}^n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)\mathbf{A} + \frac{1}{3}\left(2^n + 2(-1)^n\right)\mathbf{I}$ On constate de plus que cette **expression reste vraie pour n = 1**

Partie B

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans B est **A**.

1°) **a) O**n pose $E_1 = \ker(f + \mathrm{Id})$ et $E_2 = \ker(f - 2\,\mathrm{Id})$. **R**appeler pourquoi E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

f et Id étant deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, $f + \mathrm{Id}$ et $f - 2\,\mathrm{Id}$ sont aussi deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$. En particulier leurs noyaux respectifs sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ **: E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$**

b) Déterminer E_1 et E_2 ainsi que leur nature géométrique. **D**onner une base C_1 de E_1 et une base C_2 de E_2.

On détermine les noyaux E_1 et E_2.

- Soit $X = (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. $X\in E_1 \Leftrightarrow f(X) = -X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -y\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

  Aussi **E_1 est l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$, une base en est $C_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$**

- Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. $X \in E_2 \Leftrightarrow f(X) = 2X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Aussi E_2 est la droite de $\mathbb{R}^3$ dirigée par le vecteur $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, une base en est $C_2 = (\varepsilon_3)$

c) Montrer que si l'on appelle C la famille obtenue en effectuant la réunion de C_1 et de C_2, on obtient une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $C = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. On calcule le déterminant de C dans la base B .

On a : $\det_B(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ **Ainsi C est une base de $\mathbb{R}^3$**

Remarque : On pouvait aussi montrer qu'il s'agissait d'une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3

d) Montrer que: $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$

Montrons que $E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. On a déjà $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subset E_1 \cap E_2$ car $E_1 \cap E_2$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$

Soit $X \in E_1 \cap E_2$. Puisque $X \in E_1$, on a : $f(X) = -X$. Puisque $X \in E_2$, on a : $f(X) = 2X$

D'où, en regroupant les deux résultats précédents, on obtient : $-X = 2X$ i.e. $0_{\mathbb{R}^3}$ Ainsi **$E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$**

Or : **$\dim(E_1) + \dim(E_2) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$** donc, puisque E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ en somme directe et dont la somme des dimensions vaut $\dim(\mathbb{R}^3)$, on a par caractérisation des sous-espaces supplémentaires en dimension finie : **$\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$**

e) Soient f_1 et f_2 les restrictions de f à E_1 et E_2. **D**éterminer les natures géométriques de f_1 et f_2

- $\forall X \in E_1$, $f(X) = -X$ donc $\forall X \in E_1$, $f_1(X) = -X$: **f_1 est l'homothétie de E_1 de rapport -1**
- $\forall X \in E_2$, $f(X) = 2X$ donc $\forall X \in E_2$, $f_2(X) = 2X$: **f_2 est l'homothétie de E_2 de rapport 2**

2°) a) Déterminer la matrice **D** de *f* dans la base C.

Puisque ε_1 et ε_2 sont dans E_1, on a : $f(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1$ et $f(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2$ De même : $f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3$

D'où : **$\mathrm{mat}_C(f) = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$**

b) Déterminer la matrice de passage **P** de la base canonique B vers la base C.

$P = \mathrm{mat}_B(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Rappeler pourquoi **P** est inversible et calculer son inverse $\mathbf{P}^{-1}$.

P est la matrice de passage d'une base vers une autre donc **P est inversible**

Par la méthode du pivot, on trouve : **$P^{-1} = \mathrm{mat}_C(B) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**

d) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\,\mathbf{D}^n\,\mathbf{P}^{-1}$

D'après la formule de changement de bases, on a : $\mathbf{A} = \mathbf{P\,D\,P}^{-1}$

Par récurrence immédiate, on obtient : **$A^n = P\,D^n\,P^{-1}$**

e) En déduire la valeur de $\mathbf{A}^n$ en fonction de n pour tout entier n non nul.

Puisque **D** est diagonale, on calcule aisément sa puissance n-ième et on a : $\mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Ainsi, on obtient : **$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2(-1)^n + 2^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$** et on retrouve bien: $\mathbf{A}^n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)\,\mathbf{A} + \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)\,\mathbf{I}$

Partie C

1°) a) Calculer le produit: **(A + I) (A – 2.I)**. **E**n déduire à nouveau que **A** est inversible et retrouver $\mathbf{A}^{-1}$.

$(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-2.\mathbf{I}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - 2\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \mathbf{0}_3$ car $\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{I} + \mathbf{A}$ Donc : **$(A + I)(A - 2.I) = 0_3$**

Ainsi : $\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{I})\,\mathbf{A} = \mathbf{I}$ Aussi **A est inversible d'inverse : $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I)$** On retrouve bien $\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) Calculer de même $(\mathbf{A}+\mathbf{I})^2$, $(\mathbf{A}-2.\mathbf{I})^2$ et en déduire une expression simple de : $(\mathbf{A}+\mathbf{I})^n$ et $(\mathbf{A}-2.\mathbf{I})^n$ pour tout entier n non nul.

$(\mathbf{A}+\mathbf{I})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + \mathbf{I} = 3(\mathbf{A}+\mathbf{I})$ car $\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{I} + \mathbf{A}$ Donc : **$(A + I)^2 = 3(A + I)$**

$(\mathbf{A}-2.\mathbf{I})^2 = \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 4\mathbf{I} = -3(\mathbf{A}-2.\mathbf{I})$ car $\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{I} + \mathbf{A}$ Donc : **$(A - 2.I)^2 = -3(A - 2.I)$**

Soit P_n la propriété de récurrence : " $(\mathbf{A}+\mathbf{I})^n = 3^{n-1}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$ et $(\mathbf{A}-2.\mathbf{I})^n = (-3)^{n-1}(\mathbf{A}-2.\mathbf{I})$ "

- **P_1 est clairement vérifiée**
- Si P_n est vraie (avec $n \geq 1$), P_{n+1} est-elle également vraie ? On a $(\mathbf{A}+\mathbf{I})^{n+1} = (\mathbf{A}+\mathbf{I})^n(\mathbf{A}+\mathbf{I}) = 3^{n-1}(\mathbf{A}+\mathbf{I})^2 = 3^{n-1}(\mathbf{A} +$
  De même : $(\mathbf{A}-2.\mathbf{I})^n = (\mathbf{A}-2.\mathbf{I})^n(\mathbf{A}-2.\mathbf{I}) = (-3)^{n-1}(\mathbf{A}-2.\mathbf{I})^2 = (-3)^n(\mathbf{A}-2.\mathbf{I})$. Donc **$P_{n+1}$ est vraie**

- Ainsi on a montré que P_1 est vraie et que, si P_n vraie (avec $n \geq 1$), P_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurre
  on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n vraie i.e. **$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(A + I)^n = 3^{n-1}(A + I)$ et $(A - 2.I)^n = (-3)^{n-1}(A - 2.I)$**

2) On note $\mathbf{M}(a,b)$ la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{M}(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

a) et b) On note l'ensemble $F = \{ \mathbf{M}(a,b) \,;\, (a,b)\in\mathbb{R}^2 \}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. Montrer que F est de dimension 2.

Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$. $M \in F \Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid M = a\,\mathbf{I} + b\,\mathbf{A} \Leftrightarrow M \in \text{vect}\,(\mathbf{I},\mathbf{A})$

Ainsi F = vect (I,A) : F est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ de dimension 2 (car **I** et **A** sont linéairement indépendants)

c) Montrer que $\big((\mathbf{A} + \mathbf{I}) , (\mathbf{A} - 2.\mathbf{I}) \big)$ est une base de F.

$(\mathbf{A} + \mathbf{I})$ et $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ sont deux éléments de F.

De plus si α et β sont deux rées tels que $\alpha\,(\mathbf{A} + \mathbf{I}) + \beta\,(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \mathbf{0}_3$, alors on a $(\alpha + \beta)\,\mathbf{A} + (\alpha - 2\beta)\,\mathbf{I} = \mathbf{0}_3$ Donc comme (I,A) libre, on obtient : $(\alpha + \beta) = (\alpha - 2\beta) = 0$ i.e. $\boldsymbol{\alpha = \beta = 0}$

Aussi **((A + I) , (A – 2I)) est une famille libre de F**. C'est une famille libre d deux vecteurs de F qui est de dimension 2 donc c'est une base de F : **((A + I) , (A – 2I)) est une base de F**

d) Calculer les coordonnées de $\mathbf{M}(a,b)$ dans cette base.

On a : $\mathbf{I} = \frac{1}{3}((\mathbf{A} + \mathbf{I}) - (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}))$ et $\mathbf{A} = \frac{1}{3}(2(\mathbf{A} + \mathbf{I}) + (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}))$.

Ainsi : $\mathbf{M(a,b) = a\,I + b\,A = \dfrac{a + 2b}{3}\,(A + I) + \dfrac{b - a}{3}\,(A - 2I)}$

3) Calculer $(\mathbf{M}(a,b))^n$ pour tout entier n non nul. Vérifier le résultat obtenu dans le cas particulier $\mathbf{M}(0,1)$.

$(\mathbf{A} + \mathbf{I})$ et $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ sont deux éléments de $M_3(\mathbb{R})$ qui commutent (pour le produit) car ce sont des polynômes en A.

De plus : $(\mathbf{A} + \mathbf{I})\,(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\,(\mathbf{A} + \mathbf{I}) = \mathbf{0}_3$ et si $k\in\mathbb{N}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{I})^{k+1}$ est colinéaire à $(\mathbf{A} + \mathbf{I})$ et $(\mathbf{A} - 2.\mathbf{I})^{k+1}$ à $(\mathbf{A} - 2.\mathbf{I})$

Ainsi, en utilisant la formule du binôme, on a, si $n\in\mathbb{N}^*$:

$$M(a,b)^n = \left(\frac{a + 2b}{3}(\mathbf{A} + \mathbf{I}) + \frac{b - a}{3}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{a + 2b}{3}\right)^k \left(\frac{b - a}{3}\right)^{n-k} (\mathbf{A} + \mathbf{I})^k\,(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{n-k}$$

$$= \left(\frac{a + 2b}{3}\right)^n (\mathbf{A} + \mathbf{I})^n + \left(\frac{b - a}{3}\right)^n (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \left(\frac{a + 2b}{3}\right)^k \left(\frac{b - a}{3}\right)^{n-k} (\mathbf{A} + \mathbf{I})^k\,(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{n-k}$$

$$= \left(\frac{a + 2b}{3}\right)^n (\mathbf{A} + \mathbf{I})^n + \left(\frac{b - a}{3}\right)^n (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^n \quad \text{car si } k\geq 1 \text{ et } n - k \geq 1,\ (\mathbf{A} + \mathbf{I})^k\,(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^{n-k} = \mathbf{0}$$

D'où si $n \geq 1$, $\mathbf{M(a,b)^n = \dfrac{(a + 2b)^n}{3}\,(A + I) - \dfrac{(a - b)^n}{3}\,(A - 2I)}$

Lorsque a = 0 et b = 1 on retrouve : $\mathbf{A}^n = \frac{1}{3}2^n\,(\mathbf{A} + \mathbf{I}) - \frac{1}{3}(-1)^n\,(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)\,\mathbf{A} + \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)\,\mathbf{I}$

Partie D

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit R_n le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $(X+1)(X-2)$

1°) **a)** Que peut-on dire du degré de R_n ?

Par le théorème de la division euclidienne, $\deg(R_n) \leq 1$

b) Calculer $R_n(-1)$ et $R_n(2)$ puis déterminer le polynôme R_n.

Il existe un polynôme Q_n tel que $X^n = (X + 1)\,(X - 2)\,Q_n + R_n$

En prenant les valeurs en 2 et en -1 dans cette expression, on obtient : $\mathbf{R_n(2) = 2^n}$ **et** $\mathbf{R_n(-1) = (-1)^n}$

Or R_n est un polynome de degré inférieur ou égal à 1 et on a $R_n(2) = 2^n$ et $R_n(-1) = (-1)^n$,

donc on a : $\mathbf{R_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}\,X + \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}}$

c) Montrer que les coefficients de R_n sont des entiers.

Puisque $2 \equiv -1 \bmod(3)$ et donc que $2^n \equiv (-1)^n \bmod(3)$, on a $2^n - (-1)^n \equiv 0 \bmod(3)$ et $2^n + 2(-1)^n \equiv 0 \bmod(3)$

Ainsi $\mathbf{\dfrac{2^n - (-1)^n}{3}}$ **et** $\mathbf{\dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}}$ **sont des entiers**

2) Retrouver à nouveau l'expression de $\mathbf{A}^n$

On a : $\mathbf{A}^n = (\mathbf{A} + \mathbf{I})\,(\mathbf{A} - 2\,\mathbf{I})\,Q_n(\mathbf{A}) + R_n(\mathbf{A})$ car $X^n = (X + 1)\,(X - 2)\,Q_n + R_n$

Or $(\mathbf{A} + \mathbf{I})\,(\mathbf{A} - 2\,\mathbf{I}) = \mathbf{0}_3$ Donc $\mathbf{A^n = R_n(A) = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}\,A + \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}\,I}$