Devoir en temps libre n° 17

PROBLEME : Mines de SUP 2010, Epreuve Commune Pb II

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est-à-dire qui vérifient 1a relation : $M \cdot {}^tM = {}^tM \cdot M \quad (1)$
Dans la suite de l'énoncé, on se contentera alors de dire dans ce cas que la matrice M vérifie la relation (1).

PARTIE I :

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire ayant 2 lignes et 2 colonnes et des coefficients réels.
On notera en particulier :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices A et C vérifient la relation (1)
2. Calculer A^2. En déduire que pour tout, entier naturel non nul n, A^n vérifie la relation (1).
3. Montrer que A est inversible.

Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base canonique $\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est A.

4. Préciser les valeurs de $u\left(\vec{i}\right)$ et $u\left(\vec{j}\right)$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
   Montrer que u est une symétrie. Préciser l'ensemble des vecteurs invariants.

Dans toute la suite on notera $U = A + I$.

5. Montrer que la matrice U vérifie la relation (1). Montrer que, pour tout entier non nul n, il existe un réel α_n tel que $U^n = \alpha_n U$.
   En déduire que toutes ses puissances U^n, $n \in \mathbb{N}^*$ vérifient (1)

On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1).

6. Calculer les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée.
   En déduire que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Etant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d pour que M appartienne à E_2. On donnera les deux formes possibles des matrices de E_2
8. En déduire que E_2 est la, réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on précisera pour chacun une base.
9. Etant données M et N deux matrices de E_2 a-t-on nécessairement $M \cdot N \in E_2$? On pourra utiliser certaines matrices introduites précédemment dans l'énoncé.

PARTIE II :

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $\mathcal{B}' = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\vec{i}) = -\vec{k}$, $h\left(\vec{j}\right) = \vec{i}$, $h\left(\vec{k}\right) = \vec{j}$ ainsi que $S = mat_{\mathcal{B}'}(h)$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1) est noté E_3.

1. Représenter la matrice S
2. Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 sont dans E_3.
3. Montrer que pour tous réels a, b et c la matrice $R = aI_3 + bS + cS^2$ appartient à E_3
4. En déduire que E_3 contient un espace vectoriel de dimension 3 que l'on notera F.
5. Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

PARTIE III :

On se place à présent dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $\mathcal{B}'' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$

On définit la matrice B par : $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

où a est un réel quelconque,, et on appelle u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}''}(u) = B$
L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_4

1. Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$.

Dans toute la suite on pose $a = -1$.

2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\operatorname{Im}(u)$.
3. Calculer $u(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4})$ Que remarque-t-on
4. Calculer $B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Commenter le résultat obtenu
5. On note $\mathcal{C} = (\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\ ,\ \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}\ ,\ \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_4}\ ,\ \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4})$ Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$
   Déduire de la question précédente $\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(u)$
   En déduire l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que $B = P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale.
   On ne demande pas d'expliciter la matrice P^{-1}.
6. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B^n = P\Delta^n P^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et B^{2p+1} pour tout entier naturel p en fonction de B et de B^2.

CORRECTION

SECOND PROBLEME :

PARTIE I :

1) On remarque que ${}^tA = A$ donc ${}^tA.A = A^2 = A.{}^tA$ donc A vérifie la relation (1)

De même on remarque ${}^tC = -C$ donc ${}^tC.C = -C^2 = C.{}^tC$ donc C vérifie la relation (1)

2) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

On en déduit que selon la parité de n on a $A^n = A$ ou $A^n = I$. Dans les deux cas ces matrices vérifient la relation (1)

3) Pour montrer que A est inversible il suffit de prouver que son déterminant est non nul :

$det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ ou encore puisque $A^2 = I$, A est inversible d'inverse lui-même.

4) Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base on a : $u(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{j}$ et $u(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{i}$

u est donc bien une symétrie car $u \circ u(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}$ et $u \circ u(\overrightarrow{j}) = \overrightarrow{j}$ donc $u \circ u = id_{\mathbb{R}^2}$.

ensemble des vecteurs invariants : $V\binom{x}{y}$ est invariant par u $\Leftrightarrow AV = V \Leftrightarrow \binom{x}{y} = \binom{y}{x} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow V = \binom{x}{x} \Leftrightarrow V \in \mathbb{R}\binom{1}{1}$

5) U vérifie la relation (1) car comme pour la matrice A elle est symétrique.

Montrons : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U^n = 2^{n-1}U$ par récurrence :

Pour n=1 le résultat donne $U = 2^0.U$ donc est vrai

Supposons que pour un entier n on a $U^n = 2^{n-1}U$ et montrons la relation au rang n+1 : $U^{n+1} = U.U^n = 2^{n-1}.U^2$ par hypothèse de récurrence; Or $U^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$=2U. D'où $U^{n+1} = 2^{n-1}.2.U = 2^n.U$

Les puissances U^n, vérifient donc(1) puisque ce sont les mêmes que U à une constante multiplicative près.

6) $A + C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ donc $(A + C).{}^t(A + C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ et ${}^t(A + C).(A + C) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cela prouve que A+C ne commute pas avec sa transposée donc on a : $A \in E$, $C \in E$ et $A + C \notin E$. Cela contredit la stabilité de E par somme donc la structure d'espace vectoriel.

7) ${}^tMM = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + dc \\ ab + dc & b^2 + d^2 \end{bmatrix}$.

De même on obtient : $M^tM = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$.

Donc $M \in E \Leftrightarrow \begin{cases} ac + bd & = ab + dc \\ a^2 + b^2 & = a^2 + c^2 \\ b^2 + d^2 & = c^2 + d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ ac + cd & = ac + dc \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} b = -c \\ ac - cd & = -ac + dc \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ b=c ou bien $\begin{cases} b & = -c \\ d = & -a \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix}$ ou bien $M = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}$

8) Donc $M \in Vect(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$ ou bien $M \in Vect(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})$

E est donc bien la réunion de deux espaces vectoriels

9) Calculons $U.C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Montrons qu'alors cette matrice n'est pas dans E_2 car ne commute pas avec sa transposée :

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

On n'a donc pas la propriété proposée puisque U et C en donnent un contre-exemple.

PARTIE II :

10) Par définition, la matrice S est : $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11) $S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$S.^tS = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et ${}^tS.S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc $S \in E_3$

De même : $S^2.^t(S^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et ${}^t(S^2).S^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ donc $S^2 \in E_3$

12) ${}^tR.R = (aI_3 + b^tS + c^t(S^2)).(aI_3 + bS + cS^2) = (a^2+b^2+c^2)I_3 + a.b(S+^tS) + a.c(^t(S^2)+S^2) + b.c(S.^t(S^2)+S^2.^tS) = (a^2+b^2+c^2)I_3 + a.b(S+^tS) + a.c(^t(S^2)+S^2) + b.c(S+^tS)$

et $R.^tR = (aI_3+bS+cS^2).(aI_3+b^tS+c^t(S^2)) = (a^2+b^2+c^2)I_3 + a.b(S+^tS) + a.c(^t(S^2)+S^2) + b.c(S.^t(S^2)+S^2.^tS) = ^tR.R$ donc $R \in E_3$

13) Notons $F = Vect(I_3, S, S^2) = \{aI_3 + bS + cS^2, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$. D'après la question 12, toute matrice de F commute avec sa transposée, donc $F \subset E_3$.

De plus : $aI_3 + bS + cS^2 = 0 \iff \begin{bmatrix} a & b & c \\ -c & a & b \\ -b & -c & a \end{bmatrix} = 0 \iff a = b = c = 0$ donc la famille (I_3, S, S^2) est libre et F est bien un espace vectoriel de dimension 3 inclus dans E_3

14) Soient (a,b,c) et (d,e,f) deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et soit $R = aI_3 + bS + cS^2$ et $T = dI_3 + eS + fS^2$.

$R.T = adI_3 + (ae+bd)S + (af+be+cd)S^2 + (bf+ce)S^3 + cfS^4 = adI_3 + (ae+bd)S + (af+be+cd)S^2 - (bf+ce)I_3 - cfS$ car on prouve aisément que $S^3 = -I_3$. Donc $R.T \in Vect(I_3, S, S^2) = F$ et F est bien stable par multiplication.

PARTIE III :

15) Calculons : ${}^tB.B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & a-1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$B.^tB = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+a^2 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ d'où $B \in E_4 \iff a = -1$

16. On effectue des opérations sur les colonnes de B, ce qui laisse stable son rang :

$rg(B) = rg\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = rg\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = rg\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ d'où $rg(B) = 3$

Les deuxième et troisième colonnes de B étant opposées, le vecteur $\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ est dans ker(u) donc forme une base de ker(u) puisque d'après le théorème du rang, dim ker(u)=1

les trois vecteurs colonnes non nuls de la matrice obtenue ci-dessus forment alors une base de Im(u), soit : $(\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}, -\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + 2\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_4})$

17. On utilise une notation matricielle pour ce calcul : $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

On remarque alors que $u(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}) = -2(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4})$.

18. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

On constate que les images sont égales aux doubles des vecteurs

19) Le premier vecteur est dans ker(u), pour les autres, leurs images sont des multiples d'eux-mêmes donc on obtient :

$Mat_C(u) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Notons-là Δ.

La formule de changement de base pour un endomorphisme nous donne alors la relation $B = P\Delta P^{-1}$ avec

$P = Pass(B, C) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

20) Par récurrence sur n :

* le résultat pour n=1 résulte de la question 19)

* supposons-le pour un entier $n \geqslant 1$

* $B^{n+1} = B.B^n = P\Delta P^{-1}.P\Delta^n P^{-1} = P\Delta.\Delta^n P^{-1} = P\Delta^{n+1}P^{-1}$ d'où le résultat à l'ordre n+1.

Δ étant diagonale, on calcule aisément ses puissances; Pour n=2p, on constate alors :

$\Delta^{2p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p} \end{bmatrix} = 2^{2p-2}. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 2^{2p-2}.\Delta^2.$

Donc $B^{2p} = P(2^{2p-2}.\Delta^2)P^{-1} = 2^{2p-2}P\Delta^2P^{-1} = 2^{2p-2}B^2$

On a alors $\Delta^{2p+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2p+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2p+1} \end{bmatrix} = 2^{2p}. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2^{2p}\Delta$

d'où on obtient de même $B^{2p+1} = 2^{2p}B$.